

Fiche 9 bis

Logarithme népérien

Exercice 1 : Extrait bac Asie 2022

On définit la fonction f sur l'intervalle $I =]3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$$

1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle I .
2. Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I .
En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I .
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I .
(b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur I .
Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I .
4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5 ; 6[$.
(b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.
5. (a) Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.
(b) Étudier la convexité de la fonction f sur I .

Exercice 2 : Bac : Métropole 2022

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.
2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.
3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - (a) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.
 - (b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.
4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.
On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

2. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

(b) On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

Fiche 9 bis
 Correction

Exercice 1 : *Extrait bac Asie 2022*

On définit la fonction f sur l'intervalle $I =]3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \ln(x^2 - x - 6)$$

1. Justifier que la quantité $\ln(x^2 - x - 6)$ est bien définie pour les valeurs x de l'intervalle I .



Solution :

La fonction logarithme n'est définie que pour des valeurs strictement positives de son argument. On doit donc résoudre :

$$x^2 - x - 6 > 0.$$

Le polynôme admet deux racines : 3 et -2 , il est donc bien strictement positif sur I ainsi $f(x)$ est bien définie sur I .

2. Calculer les limites de la fonction f aux deux bornes de l'intervalle I .

En déduire une équation d'une asymptote à la courbe représentative de la fonction f sur I .



Solution :

- **Limite en 3 :**

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (x^2 - x - 6) = 0^+,$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty,$$

donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \ln(x^2 - x - 6) = -\infty.$$

Il y a donc une asymptote verticale à la courbe qui est la droite $x = 3$.

- **Limite en $+\infty$:**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - x - 6) = +\infty,$$

avec

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty,$$

donc, par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x^2 - x - 6) = +\infty.$$

3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout x appartenant à I .

Solution :

La fonction f est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables sur I .

On pose $g(x) = x^2 - x - 6$, alors :

$$f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} \text{ avec } g'(x) = 2x - 1.$$

Ainsi,

$$f'(x) = \frac{2x - 1}{x^2 - x - 6}.$$

- (b) Étudier le sens de variation de la fonction f sur I .

Dresser le tableau des variations de la fonction f en y faisant figurer les limites aux bornes de I .

Solution :

Le dénominateur $(x^2 - x - 6)$ est positif sur I , et le numérateur $2x - 1$ est positif pour $x > \frac{1}{2}$, donc sur tout I . Ainsi, $f'(x) > 0$ sur I , donc f est strictement croissante sur I :

x	3	$+\infty$
$f'(x)$	+	
f	$-\infty$	$+\infty$

4. (a) Justifier que l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]5; 6[$.

Solution :

La fonction f est continue et strictement croissante sur I . On calcule :

$$f(5) \approx 2.63, \quad f(6) \approx 3.18.$$

Par le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3$ admet une unique solution $\alpha \in]5, 6[$.

- (b) Déterminer, à l'aide de la calculatrice, un encadrement de α à 10^{-2} près.

Solution :

On utilise la calculatrice pour trouver $f(5,63) \simeq 2,99$ et $f(5,64) \simeq 3,18$:

$$5,63 < \alpha < 5,64$$

5. (a) Justifier que $f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}$.

Solution :

On utilise la dérivation du quotient et simplifions :

$$f''(x) = \frac{(2x-1)(2x-1) - (x^2-x-6)(2)}{(x^2-x-6)^2}.$$

En développant et simplifiant, on obtient :

$$f''(x) = \frac{-2x^2 + 2x - 13}{(x^2 - x - 6)^2}.$$

(b) Étudier la convexité de la fonction f sur I .

Solution :

On cherche le signe de $f''(x)$. Le numérateur $-2x^2 + 2x - 13$ est toujours négatif pour $x > 3$ (son discriminant étant négatif...), donc $f''(x) < 0$ sur I . Ainsi, f est concave sur I .

Exercice 2 : Bac : Métropole 2022

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x - x \ln x,$$

Partie A

1. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers 0.

Solution :

On a :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0 \text{ (Par croissance comparée)}$$

Donc,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - x \ln x) = 0.$$

2. Déterminer la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$.

Solution :

On factorise la fonction sur $]0 ; +\infty[$:

$$f(x) = x(1 - \ln(x))$$

On a :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 1 - \ln x = -\infty$$

Donc, par produit :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 - \ln(x)) = -\infty.$$

3. On admet que la fonction f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

(a) Démontrer que, pour tout réel $x > 0$, on a : $f'(x) = -\ln x$.

Solution :

On calcule $f'(x)$:

$$f'(x) = 1 - (1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x}) = 1 - (\ln(x) + 1) = -\ln(x).$$

(b) En déduire les variations de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$ et dresser son tableau de variations.

Solution :

On analyse le signe de $f'(x) = -\ln(x)$:

- $f'(x) > 0$ pour $0 < x < 1$ car $\ln(x) < 0$.
- $f'(x) < 0$ pour $x > 1$ car $\ln(x) > 0$.

Ainsi, f est croissante sur $]0, 1]$ et décroissante sur $[1, +\infty[$. Son maximum est atteint en $x = 1$ avec $f(1) = 1 - 1 \ln 1 = 1$:

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
f	0	1	$-\infty$

4. Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]0 ; +\infty[$.

Solution :

On résout :

$$x - x \ln x = x$$

$$-x \ln x = 0$$

$$x \ln x = 0$$

Comme $x > 0$, alors $\ln x = 0$ donc $x = 1$. Ainsi, l'unique solution est $x = 1$.

Partie B

Dans cette partie, on pourra utiliser avec profit certains résultats de la partie A.

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 &= 0,5 \\ u_{n+1} &= u_n - u_n \ln u_n \text{ pour tout entier naturel } n, \end{cases}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a : $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On rappelle que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0,5 ; 1]$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a : $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$.

**Solution :**

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 0,5$ et $u_1 = f(0,5) = 0,5 - 0,5 \ln(0,5) \simeq 0,8$. On a donc bien

$$0,5 \leq u_0 \leq u_1 \leq 1$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $0,5 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 1$ (**Hypothèse de récurrence**).

On a donc, sachant que la fonction f est croissante sur $[0,5 ; 1]$:

$$f(0,5) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(1)$$

$$\Rightarrow 0,5 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 1$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.

**Solution :**

La suite est croissante et majorée par 1, donc convergente d'après le théorème de la convergence monotone.

- (b) On note ℓ la limite de la suite (u_n) . Déterminer la valeur de ℓ .

**Solution :**

fonction f est continue, et la suite d'éléments de $]0; +\infty[$ convergente. Donc d'après le théorème du point fixe, la limite vérifie l'équation $f(x) = x$ dont la seule solution est 1 sur $]0; +\infty[$.

Donc $\ell = 1$.