

Fiche 9

Logarithme népérien

Exercice 1 : Exprimer les nombres suivants sous la forme $a \ln(3) + b \ln(5)$ avec a et b réels :

$$(a) \ln(225) \quad \left| \quad (b) \ln\left(\frac{125}{27}\right) \quad \right| \quad (c) \ln(\sqrt{135})$$

Exercice 2 : Écrire à l'aide d'un seul logarithme :

$$\begin{array}{l|l} (a) A = 5 \ln(2) - 3 \ln(3) & (c) C = \frac{3}{2} \ln(4) + 2 \ln(5) \\ (b) B = \frac{1}{2} \ln(4) - 4 \ln(2) & (d) E = 3 \ln(2) - \ln(5) + \frac{1}{2} \ln(9) \end{array}$$

Exercice 3 : Simplifier les expressions suivantes :

$$\begin{array}{l|l} (a) A = \ln(e^{12}) & (c) C = \frac{\ln(1)}{\ln(e^3)} \\ (b) B = (\ln(\sqrt{e}))^2 & (d) D = \ln(e^2) \times \ln(e^3) \end{array}$$

Exercice 4 : Résoudre les équations suivantes :

$$\begin{array}{l} (a) \ln(x) = \ln(3) \text{ pour } x \in]0; +\infty[. \\ (b) \ln(3x + 1) = \ln(5) \text{ pour } x \in \left] -\frac{1}{3}; +\infty \right[. \\ (c) \ln(x + 4) = \ln(3 - 2x) \text{ pour } x \in \left] -4; \frac{3}{2} \right[. \\ (d) \ln(4x + 1) = \ln(x) + \ln(2) \text{ pour } x \in]0; +\infty[. \end{array}$$

Exercice 5 : On considère l'équation (E) suivante :

$$\ln(x^2 + 4x) = \ln(x + 2) + \ln(3)$$

1. Résoudre les inéquations suivante :

$$(a) x^2 + 4x > 0 \quad \left| \quad (b) x + 2 > 0 \right.$$

2. En déduire que l'intervalle d'étude de l'équation (E) est $D =]0; +\infty[$.

3. Résoudre l'équation (E) sur D .

Exercice 6 : Résoudre les inéquations suivantes :

- (a) $\ln(x) \leq \ln(7)$ pour $x \in]0; +\infty[$.
- (b) $\ln(3x - 5) > \ln(2)$ pour $x \in \left] \frac{5}{3}; +\infty \right[$.
- (c) $2\ln(x) < \ln(5x - 4)$ pour $x \in \left] \frac{4}{5}; +\infty \right[$.

Exercice 7 : Résoudre les équations et inéquations suivantes :

- (a) $e^{3x+2} = 5$
- (b) $2^x > 5000$
- (c) $\left(\frac{8}{9}\right)^n < 0,0001$, pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 8 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes.

- (a) $e^{2x} - 5e^x + 6 = 0$
- (b) $e^{2x} - 6e^x + 4 = 0$

Exercice 9 : Étudier les limites suivantes :

- | | |
|--|--|
| <p>(a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(\ln(x))}{x^2 + 1}$</p> <p>(b) $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x^2 \ln(x)$</p> <p>(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^3 + 2x^2 - x + 2}{x^3 + 7x^2 + 2x + 4} \right)$</p> <p>(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(\frac{x^2 + 2x + 7}{x^3 + 3x + 4} \right)$</p> | <p>(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - 5\ln(x) + 2$</p> <p>(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x) - 5x}{x + 3}$</p> <p>(g) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x) - 5x}{x}$</p> <p>(h) $\lim_{x \rightarrow +0^+} \frac{1}{x} + \ln(x) - x$</p> |
|--|--|

Exercice 10 : Dériver les fonctions suivantes :

- (a) $f_1(x) = \ln(3x^2 - 2x + 1)$ sur $\mathbb{R}$
- (b) $f_2(x) = e^{3x} \ln(2e^{-3x} + 1)$ sur $\mathbb{R}$
- (c) $f_3(x) = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ sur $\mathbb{R}$

Exercice 11 : Étude des fonctions sur $]0; +\infty[$:

- | | |
|---|--|
| <p>(a) $f_1(x) = x^2 \ln(x)$</p> <p>(b) $f_2(x) = x^2 + \ln(x)$</p> | <p>(c) $f_3(x) = \ln(x + 1) \ln(x)$</p> <p>(d) $f_4(x) = \frac{\ln(x)}{x}$</p> |
|---|--|

Exercice 12: Bac : Centres étrangers 2022

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x \ln(x) + 1$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Déterminer la limite de la fonction f en 0 ainsi que sa limite en $+\infty$.
2. (a) On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et on notera f' sa fonction dérivée.
Montrer que pour tout réel x strictement positif :

$$f'(x) = 1 + \ln(x).$$

- (b) En déduire le tableau de variation de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$. On y fera figurer la valeur exacte de l'extremum de f sur $]0 ; +\infty[$ et les limites.
 - (c) Justifier que pour tout $x \in]0 ; 1[$, $f(x) \in]0 ; 1[$.
3. (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1.
(b) Étudier la convexité de la fonction f sur $]0 ; +\infty[$.
(c) En déduire que pour tout réel x strictement positif :

$$f(x) \geq x$$

4. On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de l'intervalle $]0 ; 1[$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = f(u_n)$$

- (a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n , on a : $0 < u_n < 1$.
 - (b) Dédire de la question 3. c. la croissance de la suite (u_n) .
 - (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 13 : *Extrait bac Asie 2022*

On considère la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln(x^2 + 1) + 3 - \ln(2).$$

1. Montrer que f est une fonction paire.
2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Déterminer l'expression de $f'(x)$.
Étudier le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer la valeur exacte du minimum ainsi que les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$.
4. À l'aide du tableau des variations de f , donner les valeurs du réel k pour lesquelles l'équation $f(x) = k$ admet deux solutions.
5. Résoudre l'équation $f(x) = 3 + \ln 2$.
6. Conjecturer, par lecture graphique, les abscisses des éventuels points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}_f$.
7. Montrer que, pour tout nombre réel x , on a : $f''(x) = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$.
8. En déduire le plus grand intervalle sur lequel la fonction f est convexe.