Fiche 8 bis

Dénombrement et combinatoire

Exercice 1 : Pour créer le logo d'un club de mathématiques, on propose d'écrire le mot « MATHS » et d'en colorer les lettres. On dispose de cinq couleurs différentes.

1. Combien de coloriages différents est-il possible de réaliser si l'on peut utiliser une même couleur plusieurs fois ?
2. Même question si l'on ne souhaite utiliser chaque couleur qu'une seule fois.
3. Même question si l'on souhaite que deux lettres adjacentes ne soient pas de la même couleur.

Exercice 2 : Pour créer un sujet de mathématiques, un professeur dispose d'une banque de donnée de 50 exercices :

- 15 exercices sur les suites.
- 12 exercices sur le dénombrement.
- 10 exercices de géométrie.
- 13 exercices sur l'étude de fonctions.

1. Pour composer un premier sujet, il choisit 4 exercices parmi tous les exercices possibles. Combien de sujets différents peut-il construire ?
2. Pour composer un second sujet, il choisit 2 exercices de géométrie et 2 exercices sur les suites. Combien de sujets différents peut-il construire ?
3. Pour composer un troisième sujet, le professeur choisit un exercice de chaque catégorie (suites, dénombrement, géométrie et étude de fonctions). Combien de sujets différents peut-il construire ?
4. Pour composer un quatrième sujet, il choisit 3 exercices parmi ceux sur les suites et 2 exercices parmi ceux sur l'étude de fonctions. Combien de sujets différents peut-il construire ?
5. Le professeur décide de composer un cinquième sujet en prenant exactement 5 exercices au total, dont au moins un de chaque catégorie. Combien de sujets différents peut-il construire ?
6. Pour un sixième sujet, il choisit 2 exercices parmi ceux sur le dénombrement et 3 exercices parmi tous les exercices disponibles. Combien de sujets différents peut-il construire ?
7. Pour un septième sujet, il décide de choisir 6 exercices en excluant ceux sur la géométrie. Combien de sujets différents peut-il construire ?

Exercice 3 : Lors de la Seconde Guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés incompréhensibles pour leurs opposants.

Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers divers composants : en pressant une lettre sur le clavier, on faisait s'allumer une nouvelle lettre, qui était ajoutée au message codé.

Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer.

Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine est une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement dans la machine est important. Combien de configurations différentes ces rotors permettent-ils ?

2. Chaque rotor peut être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. Combien de positions différentes peut-on donner à l'ensemble des trois rotors choisis ?

3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Vingt lettres sont reliées deux à deux et six restent inchangées.

   (a) Combien de manières différentes a-t-on de choisir six lettres inchangées parmi 26 ?

   (b) Les vingt lettres restantes sont alors reliées deux à deux par un câble. Pour le réaliser, on choisit deux lettres parmi les vingt que l'on relie, puis deux nouvelles lettres parmi les dix-huit restantes et ainsi de suite. L'ordre de sélection des câbles n'étant pas important, combien a-t-on de câblages possibles ?

4. En déduire un ordre de grandeur du nombre de réglages possibles de la machine Enigma.

Fiche 8 bis
Correction

Exercice 1 : Pour créer le logo d'un club de mathématiques, on propose d'écrire le mot « MATHS » et d'en colorer les lettres. On dispose de cinq couleurs différentes.

1. Combien de coloriages différents est-il possible de réaliser si l'on peut utiliser une même couleur plusieurs fois ?

Solution :

Pour chaque lettres, 5 couleurs peuvent être utilisées. On recherche donc un 5-uplet d'un ensemble de couleurs de cardinal 5. Il y a donc $5^5 = 3125$ coloriages différents.

2. Même question si l'on ne souhaite utiliser chaque couleur qu'une seule fois.

Solution :

Pour chaque lettres, 5 couleurs peuvent être utilisées. On recherche donc une permutation d'un ensemble de couleurs de cardinal 5 (car les couleurs ne peuvent apparaitre qu'une seul fois.). Il y a donc $5! = 120$ coloriages différents.

3. Même question si l'on souhaite que deux lettres adjacentes ne soient pas de la même couleur.

Solution :

On a 5 possibilités pour la première lettre. Pour les autres, chaque lettre à 4 possibilités de couleurs, car on ne peut choisir la couleur précédente. Ce qui donne : $5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 = 5 \times 4^4 = 1280$ possibilités.

Exercice 2 : Pour créer un sujet de mathématiques, un professeur dispose d'une banque de donnée de 50 exercices :

- 15 exercices sur les suites.
- 12 exercices sur le dénombrement.
- 10 exercices de géométrie.
- 13 exercices sur l'étude de fonctions.

1. Pour composer un premier sujet, il choisit 4 exercices parmi tous les exercices possibles. Combien de sujets différents peut-il construire ?

Solution :

Il prend 4 exercices parmi les 50, soit :

$$\binom{50}{4}$$

possibilités.

2. Pour composer un second sujet, il choisit 2 exercices de géométrie et 2 exercices sur les suites. Combien de sujets différents peut-il construire ?

Solution :

- Il prend 2 exercices parmi les 10 de géométrie, soit :
$$\binom{10}{2}$$
possibilités.
- Il prend 2 exercices parmi les 15 sur les suites, soit :
$$\binom{15}{2}$$
possibilités.

Il y a donc au total :
$$\binom{10}{2} \times \binom{15}{2}$$
possibilités.

3. Pour composer un troisième sujet, le professeur choisit un exercice de chaque catégorie (suites, dénombrement, géométrie et étude de fonctions). Combien de sujets différents peut-il construire ?

Solution :

Il prend :
$$\binom{15}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{10}{1} \times \binom{13}{1}$$
possibilités.

4. Pour composer un quatrième sujet, il choisit 3 exercices parmi ceux sur les suites et 2 exercices parmi ceux sur l'étude de fonctions. Combien de sujets différents peut-il construire ?

Solution :

$$\binom{15}{3} \times \binom{13}{2}$$
possibilités.

5. Le professeur décide de composer un cinquième sujet en prenant exactement 5 exercices au total, dont au moins un de chaque catégorie. Combien de sujets différents peut-il construire ?

Solution :

Il prend 1 exercice dans chaque catégorie, puis choisit un 5 ieme exercice parmi les 46 restants :

$$\binom{15}{1} \times \binom{12}{1} \times \binom{10}{1} \times \binom{13}{1} \times \binom{46}{1}$$

possibilités.

6. Pour un sixième sujet, il choisit 2 exercices parmi ceux sur le dénombrement et 3 exercices parmi tous les exercices disponibles. Combien de sujets différents peut-il construire ?

Solution :

$$\binom{12}{2} \times \binom{50}{3}$$

possibilités.

7. Pour un septième sujet, il décide de choisir 6 exercices en excluant ceux sur la géométrie. Combien de sujets différents peut-il construire ?

Solution :

Il choisit parmi les 40 exercices non géométriques :

$$\binom{40}{6}$$

possibilités.

Exercice 3 : Lors de la Seconde Guerre mondiale, les Allemands utilisaient la machine Enigma pour s'envoyer des messages chiffrés incompréhensibles pour leurs opposants.

Cette machine chiffrait les informations en faisant passer un courant électrique à travers divers composants : en pressant une lettre sur le clavier, on faisait s'allumer une nouvelle lettre, qui était ajoutée au message codé.

Le chiffrement d'Enigma était réputé inviolable, la machine nécessitant de nombreux réglages. Pour déchiffrer les messages interceptés, il fallait retrouver tous les réglages utilisés par les Allemands pour l'envoyer.

Pour ne rien arranger aux affaires des Alliés, ces réglages étaient modifiés chaque jour.

1. Le premier élément de la machine est une série de trois rotors qui permettent de réaliser les premières connexions électriques. Ces rotors sont choisis parmi cinq modèles et l'ordre de positionnement dans la machine est important. Combien de configurations différentes ces rotors permettent-ils ?

Solution :

Les trois rotors sont choisis parmi 5 modèles distincts et leur ordre est important. Il s'agit d'un arrangement de 3 éléments parmi 5 :

$$A_5^3 = \frac{5!}{(5-3)!} = \frac{5!}{2!} = \frac{5 \times 4 \times 3 \times 2!}{2!} = 5 \times 4 \times 3 = 60.$$

Il existe donc **60 configurations** possibles pour le choix et l'ordre des rotors.

2. Chaque rotor peut être placé sur 26 positions différentes, correspondant aux 26 lettres de l'alphabet. Combien de positions différentes peut-on donner à l'ensemble des trois rotors choisis ?

Solution :

Chaque rotor peut être placé sur 26 positions indépendamment des autres. Ainsi, pour 3 rotors, le nombre total de positions possibles est :

$$26^3 = 26 \times 26 \times 26 = 17576.$$

Il y a donc **17 576 configurations** possibles pour l'ensemble des trois rotors choisis.

3. La dernière étape consiste à réaliser un câblage sur un tableau de connexion. Vingt lettres sont reliées deux à deux et six restent inchangées.

   (a) Combien de manières différentes a-t-on de choisir six lettres inchangées parmi 26 ?

   Solution :

   Il s'agit d'un choix de 6 lettres parmi 26, sans ordre, donc une combinaison :

   $$\binom{26}{6} = \frac{26!}{6!(26-6)!} = \frac{26!}{6!20!}.$$

   En développant :

   $$\binom{26}{6} = \frac{26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22 \times 21}{6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} = 230230.$$

   Il y a donc **230 230 façons** de choisir les six lettres inchangées.

   (b) Les vingt lettres restantes sont alors reliées deux à deux par un câble. Pour le réaliser, on choisit deux lettres parmi les vingt que l'on relie, puis deux nouvelles lettres parmi les dix-huit restantes et ainsi de suite. L'ordre de sélection des câbles n'étant pas important, combien a-t-on de câblages possibles ?

   Solution :

   Le problème revient à compter le nombre de façons de regrouper 20 lettres en 10 paires.
   On choisit d'abord une paire : soit $\binom{20}{2}$ possibilités. Puis une deuxième paire : $\binom{18}{2}$, etc...
   L'ordre n'étant pas importante, on divise par le nombre de paires, soit 10!.
   Cela correspond à la formule du nombre de façons de former des paires :

   $$\binom{20}{2}\binom{18}{2}\dots\binom{2}{2} \times \frac{1}{10!} = \frac{20!}{(10! \times 2^{10})}$$

En développant, on trouve :

$$\frac{20!}{10! \times 2^{10}} = \frac{20 \times 19 \times \cdots \times 1}{(10 \times 9 \times \cdots \times 1) \times 1024}.$$

Ce qui donne un très grand nombre, environ **150 738 274 937 250**.

4. En déduire un ordre de grandeur du nombre de réglages possibles de la machine Enigma.

Solution :

On multiplie les différentes possibilités trouvées :

$$60 \times 17576 \times 230230 \times 150738274937250.$$

En ordre de grandeur, cela donne environ :

$$1,5 \times 10^{20}.$$

Ainsi, le nombre total de configurations possibles pour la machine Enigma est d'environ 10^{20}, ce qui justifie pourquoi elle était considérée comme inviolable à l'époque.