Fiche 8

Dénombrement et combinatoire

<u>Exercice 1 :</u> On note A l'ensemble des lettres $\{a\,;\, b\,;\, c\,;\, d\}$.

1. Donner tous les arrangements à deux éléments de l'ensemble A.
2. Combien l'ensemble A a-t-il de permutations ?

<u>Exercice 2 :</u>

1. Combien de façons peut-on organiser les lettres du mot « MATHS » ?
2. Dans combien de ces anagrammes :
   (a) Le mot commence par la lettre « M » ?
   (b) Les lettres « M » et « S » sont toujours adjacentes (dans cet ordre ou l'ordre inverse) ?
3. On considère les lettres du mot « SUCCÈS » :
   (a) Combien d'anagrammes différents peut-on former avec ces lettres ?
   (b) Combien d'anagrammes commencent et finissent par « S » ?

<u>Exercice 3 :</u> Autour d'une table ronde, dont les places sont numérotées de 1 à 12, sont réunies 12 personnes. De combien de manières différentes ces 12 personnes peuvent-elles se placer si nous voulons que Hélène et Manuel soient côte à côte ?

<u>Exercice 4 :</u> Vous devez ranger sur une étagère 4 ouvrages de mathématiques différents, 6 ouvrages de sciences physiques différents et 2 ouvrages d'informatique différents.
Combien y a-t-il de rangements différents si :

1. les ouvrages doivent être rangés par spécialité ;
2. seuls les ouvrages de mathématiques doivent être rangés ensemble

<u>Exercice 5 :</u> Soit n un entier naturel. Simplifier les écritures suivantes :

$$(n+1)n! \quad ; \quad \frac{(n+2)!}{(n+1)(n+2)} \quad ; \quad \frac{(n+5)!}{(n+7)!}$$

<u>Exercice 6 :</u> Une équipe de 4 élèves doit être choisie parmi une classe de 10 élèves pour représenter l'école :

1. Combien de façons peut-on choisir les 4 élèves si l'ordre n'a pas d'importance ?
2. Combien de façons peut-on organiser les 4 élèves si l'ordre de placement dans l'équipe compte ?

Exercice 7 : Une course de 8 athlètes a lieu.

Combien y a-t-il de podiums possibles ? Combien y a-t-il de classements complets possibles ? Anne a participé à la course et a terminé sur le podium. Sachant cette information, combien de classements complets sont possibles ?

Exercice 8 : Donner les valeurs de coefficients binômiaux suivant de $\binom{6}{0}$, $\binom{6}{1}$, $\binom{12}{11}$, $\binom{9}{9}$, $\binom{7}{2}$ et $\binom{8}{5}$.

Exercice 9 : Pour tout entier naturel n, on pose

$$u_n = \binom{2n}{n}$$

1. Déterminer les 5 premiers termes de la suite.
2. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

Exercice 10 : Dans une assemblée de n personnes, on souhaite élire k personnes dans une commission. L'une de ces k personnes en sera la présidente.

1. Combien de commissions avec son président peut-on ainsi constituer ?
2. On procède différemment : on choisit d'abord le président de la commission puis on choisit les autres membres parmi les personnes restantes. De combien de manières peut-on procéder ?
3. En déduire l'égalité suivante :
$$n\binom{n-1}{k-1} = k\binom{n}{k}$$
4. Retrouver cette égalité à l'aide de la formule sur les coefficients binomiaux.

Exercice 11 : On tire 13 cartes d'un jeu de 52 cartes. Combien de tirages différents contiennent :

a) exactement trois cœurs,

b) au plus trois cœurs,

c) exactement trois dames et au moins deux piques.

Exercice 12 : Considérons un jeu de 32 cartes réparties en 4 couleurs, chaque couleur comportant 8 cartes. Nous appellerons main tout ensemble de 8 cartes choisies au hasard parmi les 32 cartes.

Calculer combien il y a de mains :

a) distinctes,

b) comprenant 2 as et seulement 2,

c) comprenant à la fois 3 as, 2 rois et 5 cœurs.

Exercice 13 :

1. Quel est le nombre d'entiers à 5 chiffres ne contenant qu'un seul 3 ?
2. Quel est le nombre d'entiers à 5 chiffres ne contenant qu'un seul 0 et un seul 3 ?
3. Quel est le nombre d'entiers à 5 chiffres formés uniquement par des 2 et des 3 ?
4. Quel est le nombre d'entiers à 5 chiffres formés par 2 entiers non nuls ?
5. Quel est le nombre d'entiers à 5 chiffres formés par 2 entiers dont l'un est nul ?

Exercice 14 : *Sujet bac Métropole juin 2009*

Commun à tous les candidats

I. *Cette question est une restitution organisée de connaissances.*

On rappelle que si n et p sont deux nombres entiers naturels tels que $p \leqslant n$ alors $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

Démontrer que pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre entier naturel p tels que $1 \leqslant p \leqslant n$ on a :

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}$$

II. Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
7 jetons blancs numérotés de 1 à 7 et 3 jetons noirs numérotés de 1 à 3.
On tire simultanément deux jetons de ce sac.

1. (a) On note A l'évènement « obtenir deux jetons blancs ».
   Démontrer que la probabilité de l'évènement A est égale à $\dfrac{7}{15}$.

   (b) On note B l'évènement « obtenir deux jetons portant des numéros impairs ».
   Calculer la probabilité de B.

   (c) Les évènements A et B sont-ils indépendants ?

2. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de' jetons blancs obtenus lors de ce tirage simultané.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.

   (b) Calculer l'espérance mathématique de X.