Fiche 7 bis

Limites et convexité

Exercice 1 : *Type bac : Amérique du Nord mai 2022.*

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.
3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.
4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

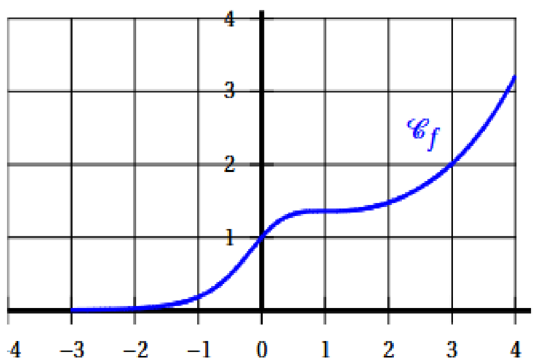
Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

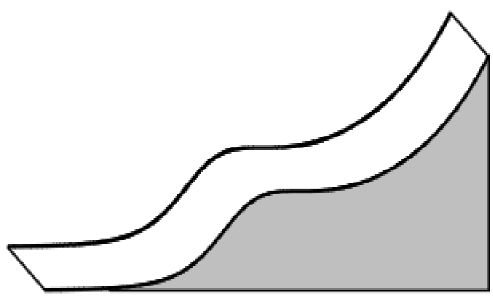
$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1 + x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.
   (b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.
2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

   (a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

(b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{\left(1+x^2\right)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Fiche 7 bis
Correction

Exercice 1 : *Type bac : Amérique du Nord mai 2022.*

Partie A

Soit p la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$p(x) = x^3 - 3x^2 + 5x + 1$$

1. Déterminer les variations de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Solution :

La fonction p est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$.

$\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) = 3x^2 - 6x + 5$

Ce trinôme du second degré n'admet aucune racine ($\Delta = -24 < 0$) donc $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $p'(x) > 0$. Donc la fonction p est strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$.

2. Justifier que l'équation $p(x) = 0$ admet dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ une unique solution qui sera notée α.

Solution :

$p(-3) = -68$ et $p(4) = 37$

La fonction p est continue et strictement croissante sur $[-3\ ;\ 4]$ à valeurs dans $[-68\ ;\ 37]$. Or $0 \in [-68\ ;\ 37]$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $p(x) = 0$ admet une unique solution, notée α, dans l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

3. Déterminer une valeur approchée du réel α au dixième près.

Solution :

À la calculatrice, $\alpha \approx -0,2$.

4. Donner le tableau de signes de la fonction p sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Solution :

D'après les variations de la fonction p, et en utilisant le résultat précédent, on peut établir le tableau de signe de la fonction p sur $[-3\ ;\ 4]$:

x	-3		α		4
$p(x)$		$-$	0	$+$	

Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$ par :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x^2}$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. (a) Déterminer la dérivée de la fonction f sur l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$.

Solution :

La fonction f est continue et dérivable sur $[-3\ ;\ 4]$ comme quotient de fonctions dérivables sur $[-3\ ;\ 4]$ avec $\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $1+x^2 \neq 0$.

$\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $f'(x) = \dfrac{e^x \times (1+x^2) - e^x \times 2x}{(1+x^2)^2} = \dfrac{e^x(x^2-2x+1)}{(1+x^2)^2} = \dfrac{(x-1)^2\ e^x}{(1+x^2)^2}$.

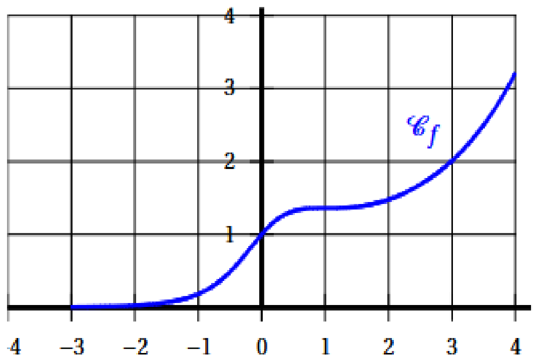
(b) Justifier que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point d'abscisse 1.

Solution :

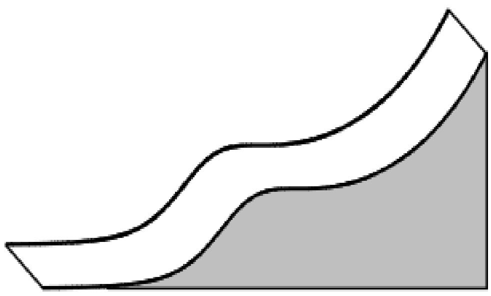
On a $f'(1) = \dfrac{(1-1)^2\ e^1}{(1+1^2)^2} = 0$

Donc au point d'abscisse 1, $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale.

2. Les concepteurs d'un toboggan utilisent la courbe $\mathcal{C}_f$ comme profil d'un toboggan. Ils estiment que le toboggan assure de bonnes sensations si le profil possède au moins deux points d'inflexion.



Représentation de la courbe $\mathscr{C}_f$


Vue de profil du toboggan

(a) D'après le graphique ci-dessus, le toboggan semble-t-il assurer de bonnes sensations ? Argumenter.

Solution :

Avec la précision permise par le graphique, on peut voir que la fonction f est :

- convexe sur $[-3\ ;\ 0]$;
- concave sur $[0\ ;\ 1]$;
- convexe sur $[1\ ;\ 4]$.

Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion, aux abscisses $x = 0$ et $x = 1$.
Le toboggan semble donc assurer de bonnes sensations.

(b) On admet que la fonction f'', dérivée seconde de la fonction f, a pour expression pour tout réel x de l'intervalle $[-3\ ;\ 4]$:

$$f''(x) = \frac{p(x)(x-1)\mathrm{e}^x}{(1+x^2)^3}$$

où p est la fonction définie dans la partie A.

En utilisant l'expression précédente de f'', répondre à la question : « le toboggan assure-t-il de bonnes sensations ? ». Justifier.

Solution :

$\forall x \in [-3\ ;\ 4] : f''(x) = \dfrac{p(x)(x-1)e^x}{(1+x^2)^3}$

Recherchons les points d'inflexion, c'est-à-dire les valeurs de $x \in [-3\ ;\ 4]$ pour lesquelles $f''(x)$ s'annule et change de signe.

$\forall x \in [-3\ ;\ 4]$, $(1+x^2)^3 > 0$ et $e^x > 0$ donc $f''(x)$ a le même signe que $p(x)(x-1)$.

On construit alors le tableau de signe suivant :

x	-3		α		1		4
$p(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f''(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La fonction f'' s'annule et change de signe en $x = \alpha$ et $x = 1$. Donc $\mathcal{C}_f$ admet deux points d'inflexion. Le toboggan assure donc de bonnes sensations.