Fiche 7

Limites et convexité

Exercice 1 : Déterminer la limite de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f_1 : x \mapsto x^3 + x - 2$; $a = -\infty$
2. $f_2 : x \mapsto \sqrt{x} + \dfrac{1}{x} - 5$; $a = +\infty$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{x} + 2}$; $a = +\infty$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^x + x^2}{5}$; $a = +\infty$
5. $f_5 : x \mapsto \dfrac{e^x + 5}{x^2 - 4}$; $a = -\infty$
6. $f_6 : x \mapsto (3e^x - 1)(x^4 + 3)$; $a = -\infty$

Exercice 2 : Déterminer la limite (éventuellement la limite à droite et la limite à gauche) de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f_1 : x \mapsto \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$; $a = 1$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{5x + 2}{x + 4}$; $a = -4$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{3x}{x^2 - 1}$; $a = -1$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{5}{2 - \sqrt{x}}$; $a = 4$

Exercice 3 : Déterminer la limite de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f_1 : x \mapsto x^5 - 2x^3 - x$; $a = +\infty$
2. $f_2 : x \mapsto \dfrac{x^3 - 3}{x + 2}$; $a = -\infty$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{3x^2 - x + 4}{4x^2 + 1}$; $a = +\infty$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x - 3e^x}{2x^3 - x^2 + 1}$; $a = -\infty$

Exercice 4 : Déterminer la limite de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f_1 : x \mapsto 3e^{-2x}$; $a = +\infty$
2. $f_2 : x \mapsto 5e^{3x+1}$; $a = -\infty$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{3 + \sqrt{2x + 1}}{2}$; $a = +\infty$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{2}{1 - e^{x^2}}$; $a = -\infty$

Exercice 5 : Déterminer la limite de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f_1 : x \mapsto x\sin(x)$; $a = +\infty$
2. $f_2 : x \mapsto x\cos(x)$; $a = +\infty$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{3 + 2\cos(x)}{2x + 3}$; $a = +\infty$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{x^2 + 3\sin(x)}{2x^2 + x - 1}$; $a = -\infty$

Exercice 6 : Déterminer la limite de chaque fonction lorsque x tend vers a.

1. $f_1 : x \mapsto xe^{-x}$; $a = +\infty$
2. $f_2 : x \mapsto x^2 - e^x$; $a = +\infty$
3. $f_3 : x \mapsto \dfrac{x^2-1}{e^x-3}$; $a = +\infty$
4. $f_4 : x \mapsto \dfrac{e^x - x^2}{2e^x + x}$; $a = +\infty$

Exercice 7 : Pour les fonctions suivantes, faire l'étude complète : Domaine de définition, tableau de variation avec limites aux bornes du domaine de définition, asymptotes éventuelles puis courbe.

1. $f_1(x) = \dfrac{x+1}{x+3}$
2. $f_2(x) = \dfrac{4x^2-3x+1}{x^2-1}$
3. $f_3(x) = (x+1)e^{-x}$
4. $f_4(x) = \dfrac{e^{-\frac{x}{2}}}{x+3}$

Exercice 8 : Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

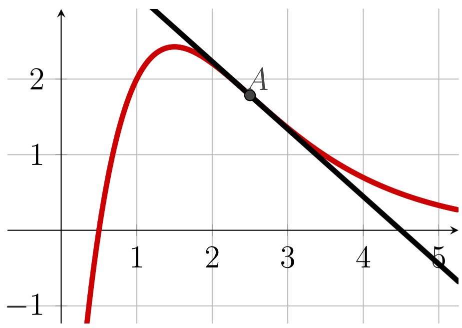
$$h(x) = (2-x^2)e^x$$

1. Déterminer la fonction dérivée h' et la fonction dérivée seconde h'' de h pour tout réel x.
2. En déduire la convexité de h et les abscisses de ses éventuels points d'inflexion.

Exercice 9 :

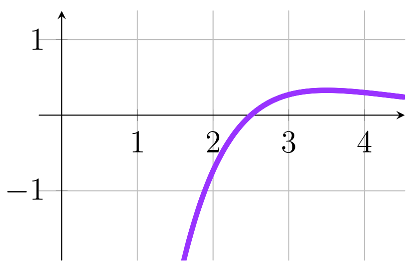
On considère une fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$, représentée par la courbe $\mathcal{C}$ ci-contre.

La droite T est tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A d'abscisse $\dfrac{5}{2}$.

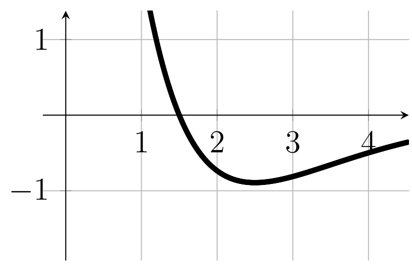


1. Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$.
2. Que semble présenter la courbe $\mathcal{C}$ au point A ?
3. La dérivée f' et la dérivée seconde f'' de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.

   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente.



Courbe $\mathcal{C}_1$



Courbe $\mathcal{C}_2$

<u>Exercice 10 :</u> *Type bac : Centres étrangers, juin 2024*

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$ par

$$f(x) = \frac{e^x}{x-1}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
On appelle $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère.

1. (a) Déterminer la limite de la fonction f en 1.
   (b) En déduire une interprétation graphique.
2. Déterminer la limite de la fonction f en $-\infty$.
3. (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a :
   $$f'(x) = \frac{(x-2)e^x}{(x-1)^2}.$$
   (b) Dresser, en justifiant, le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
4. On admet que pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a
   $$f''(x) = \frac{\left(x^2-4x+5\right)e^x}{(x-1)^3}.$$
   (a) Étudier la convexité de la fonction f sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
   (b) Déterminer l'équation réduite de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
   (c) En déduire que, pour tout réel x de l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$, on a :
   $$e^x \geqslant (-2x-1)(x-1).$$
5. (a) Justifier que l'équation $f(x) = -2$ admet une unique solution α sur l'intervalle $]-\infty\ ;\ 1[$.
   (b) À l'aide de la calculatrice, déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.

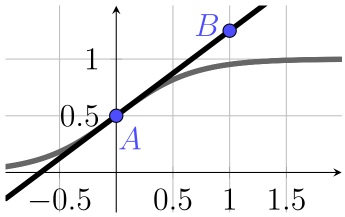
<u>Exercice 11 :</u> *Type bac : Centres étrangers mars 2023*

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{1+e^{-3x}}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal du plan.
On nomme A le point de coordonnées $\left(0\ ;\ \frac{1}{2}\right)$ et B le point de coordonnées $\left(1\ ;\ \frac{5}{4}\right)$.

On a tracé ci-dessous la courbe $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.



Partie A : lectures graphiques

Dans cette partie, les résultats seront obtenus par lecture graphique. Aucune justification n'est demandée.

1. Déterminer l'équation réduite de la tangente $\mathcal{T}$.
2. Donner les intervalles sur lesquels la fonction f semble convexe ou concave.

Partie B : étude de la fonction

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
   Déterminer l'expression de sa fonction dérivée f'.
2. Justifier que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f.
   (b) Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f.
4. Déterminer la valeur exacte de la solution α de l'équation $f(x) = 0,99$.

Partie C : Tangente et convexité

1. Déterminer par le calcul une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   On note f'' la fonction dérivée seconde de la fonction f.
   On admet que f'' est définie sur $\mathbb{R}$ par :
   $$f''(x) = \frac{9e^{-3x}\left(e^{-3x}-1\right)}{\left(1+e^{-3x}\right)^3}.$$
2. Étudier le signe de la fonction f'' sur $\mathbb{R}$.
3. (a) Indiquer, en justifiant, sur quel(s) intervalle(s) la fonction f est convexe.
   (b) Que représente le point A pour la courbe $\mathcal{C}_f$?
   (c) En déduire la position relative de la tangente $\mathcal{T}$ et de la courbe $\mathcal{C}_f$.
   Justifier la réponse.