

Fiche 6 bis

Orthogonalité de l'espace

Exercice 1 : (Type bac : Centres étrangers juin 2021)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2 ; -1 ; 0), B(3 ; -1 ; 2), C(0 ; 4 ; 1) \text{ et } S(0 ; 1 ; 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .
(b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .
(c) Montrer que les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.
3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .
(a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .
(b) Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2 ; 2 ; 3)$.
4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.
Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.
5. (a) Calculer la longueur SA .
(b) On indique que $SB = \sqrt{17}$.
En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

Exercice 2 : (Type bac : Métropole, Antilles-Guyane septembre 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1 ; -1 ; 3), \quad B(1 ; 1 ; 2), \quad C(1 ; -1 ; 7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1 ; 6 ; 8)$ et $E(11 ; -9 ; 2)$.

1. (a) Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -1 + 4t \\ y &= 6 - 5t \\ z &= 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

- (b) Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.
- (c) Le point $F(1,36 ; -1,7 ; -0,7)$ appartient-il à la droite Δ' ?
2. (a) Montrer que les points A , B et C définissent un plan.
- (b) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) .
- (c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.
3. (a) Montrer que le point $G(7 ; -4 ; 4)$ appartient à la droite Δ .
- (b) Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC) .
- (c) En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.
4. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .
- (b) Calculer le volume V du tétraèdre $ABCG$.

Fiche 6 bis
Correction

Exercice 1 : (Type bac : Centres étrangers juin 2021)

Dans un repère orthonormé de l'espace, on considère les points suivants :

$$A(2 ; -1 ; 0), B(3 ; -1 ; 2), C(0 ; 4 ; 1) \text{ et } S(0 ; 1 ; 4).$$

1. Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

Solution :

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-2 \\ -1-(-1) \\ 2-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0-2 \\ 4-(-1) \\ 1-0 \end{pmatrix} \text{ soit } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On en déduit la valeur du produit scalaire :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 1 \times (-2) + 0 \times 5 + 1 \times 2 = 0$$

Les vecteurs sont donc orthogonaux, le triangle ABC est donc rectangle en A .

2. (a) Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est orthogonal au plan (ABC) .

Solution :

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc ce sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC) . Il suffit donc de montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à ces deux vecteurs :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 1 + 1 \times 0 + (-1) \times 2 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$;
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-2) + 1 \times 5 + (-1) \times 1 = -4 + 5 - 1 = 0$ donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$.

Donc $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) , c'est donc un vecteur normal au plan.

- (b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

Solution :

Le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC) donc le plan (ABC) a une équation cartésienne de la forme : $2x + 1y + (-1)z + d = 0$ soit $2x + y - z = d = 0$ où $d \in \mathbb{R}$.

$A \in (ABC)$ donc $2x_A + y_A - z_A + d = 0$, c'est-à-dire $4 - 1 + 0 + d = 0$, donc $d = -3$.

Le plan (ABC) a pour équation : $2x + y - z - 3 = 0$.

- (c) Montrer que les points A , B , C et S ne sont pas coplanaires.

Solution :

$2x_S + y_S - z_S - 3 = 0 + 1 - 4 - 3 = -6 \neq 0$ donc $S \notin (ABC)$ donc les points A, B, C et S ne sont pas coplanaires.

3. Soit (d) la droite orthogonale au plan (ABC) passant par S . Elle coupe le plan (ABC) en H .

- (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d) .

Solution :

La droite (d) est orthogonale au plan (ABC) donc elle a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{n}$. De plus elle contient le point $S(0 ; 1 ; 4)$.

Donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 + 2 \times t \\ y = 1 + 1 \times t \\ z = 4 + (-1) \times t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

- (b) Montrer que les coordonnées du point H sont $H(2 ; 2 ; 3)$.

Solution :

Le point H est l'intersection de la droite (d) et du plan (ABC) , donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= 2t \\ y &= 1 + t \\ z &= 4 - t \\ 2x + y - z - 3 &= 0 \end{cases}$$

Donc : $2(2t) + (1 + t) - (4 - t) - 3 = 0$, c'est-à-dire $4t + 1 + t - 4 + t - 3 = 0$ soit $t = 1$.

Pour $t = 1$, on aura $x = 2 \times 1 = 2$, $y = 1 + 1 = 2$ et $z = 4 - 1 = 3$.

Les coordonnées du point H sont donc $(2 ; 2 ; 3)$.

4. On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est $V = \frac{\text{aire de la base} \times \text{hauteur}}{3}$.

Calculer le volume du tétraèdre $SABC$.

Solution :

- La base est le triangle ABC rectangle en A dont l'aire vaut $\mathcal{A} = \frac{AB \times AC}{2}$.

Avec $AB = \|\vec{AB}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ donc $AB = \sqrt{5}$

$AC = \|\vec{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{30}$ donc $AC = \sqrt{30}$

$\mathcal{A} = \frac{\sqrt{5} \times \sqrt{30}}{2} = \frac{\sqrt{150}}{2} = \frac{5\sqrt{6}}{2}$

- La hauteur est SH .

$SH = \|\vec{SH}\| = \sqrt{(2-0)^2 + (2-1)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{6}$ donc $SH = \sqrt{6}$

$$\bullet \mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{A} \times SH = \frac{1}{3} \times \frac{5\sqrt{6}}{2} \times \sqrt{6} = 5$$

5. (a) Calculer la longueur SA .

Solution :

$$SA = \|\vec{SA}\| = \sqrt{(2-0)^2 + (-1-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6} \text{ donc } SA = 2\sqrt{6}$$

- (b) On indique que $SB = \sqrt{17}$.

En déduire une mesure de l'angle $\widehat{ASB}$ approchée au dixième de degré.

Solution :

$$\vec{SB} : \begin{pmatrix} 3-0 \\ (-1)-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} \text{ soit } \vec{SB} : \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \vec{SA} \cdot \vec{SB} = 2 \times 3 + (-2) \times (-2) + (-4) \times (-2) = 18.$$

$$\text{Or } \vec{SA} \cdot \vec{SB} = SA \times SB \times \cos(\widehat{ASB})$$

$$\text{Donc } 18 = 2\sqrt{6} \times \sqrt{17} \times \cos(\widehat{ASB}) \text{ et donc } \cos(\widehat{ASB}) = \frac{18}{2\sqrt{6} \times \sqrt{17}} = \frac{9}{\sqrt{102}}$$

On en déduit que $\widehat{ASB} \approx 26,98^\circ$, soit $27,0^\circ$ au dixième de degré près.

Exercice 2 : (Type bac : Métropole, Antilles-Guyane septembre 2022)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$$A(-1 ; -1 ; 3), \quad B(1 ; 1 ; 2), \quad C(1 ; -1 ; 7)$$

On considère également la droite Δ passant par les points $D(-1 ; 6 ; 8)$ et $E(11 ; -9 ; 2)$.

1. (a) Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= -1 + 4t \\ y &= 6 - 5t \\ z &= 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

Solution :

On constate facilement que pour $t = 0$, on retrouve les coordonnées de D . De même pour $t = 3$, on retrouve les coordonnées de E . Donc on a bien $\Delta = (DE)$.

- (b) Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ' parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.

Solution :

La droite Δ' est parallèle à Δ donc elle a les mêmes vecteurs directeurs que Δ (On peut prendre par exemple celui donné par les coefficients de t : $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$).

De plus, elle passe par l'origine O du repère donc elle a pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 0 + 4t \\ y = 0 - 5t \\ z = 0 - 2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R} \text{ soit } \begin{cases} x = 4t \\ y = -5t \\ z = -2t \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbb{R}$$

- (c) Le point $F(1, 36 ; -1, 7 ; -0, 7)$ appartient-il à la droite Δ' ?

Solution :

On cherche l'existence de t tel que :

$$\begin{cases} 1, 36 = 4t \\ -1, 7 = -5t \\ -0, 7 = -2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0, 34 \\ t = 0, 34 \\ t = 0, 35 \end{cases}$$

Donc le système n'a pas de solution, le point F n'est donc pas sur la droite.

2. (a) Montrer que les points A , B et C définissent un plan.

Solution :

Pour que A , B et C définissent un plan, il suffit que les points ne soient pas alignés, ou encore que les vecteurs soient pas colinéaires.

On a $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$: ces deux vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires, donc les trois points A , B et C définissent un plan.

- (b) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC) .

Solution :

On a :

- $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 \times 2 + (-5) \times 2 + (-2) \times (-1) = 0$
- $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 4 \times 2 + (-5) \times 0 + (-2) \times 4 = 0$

Donc le vecteur $\vec{u}$ est orthogonal à une base de (ABC) , donc au plan (ABC) .

- (c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.

Solution :

D'après la question précédente on sait que :

$$M(x ; y ; z) \in (ABC) \Leftrightarrow 4x - 5y - 2z + d = 0 \text{ avec } d \in \mathbb{R}.$$

Or $A(-1 ; -1 ; 3) \in (ABC)$ donc $4 \times (-1) - 5 \times (-1) - 2 \times 3 + d = 0$ soit $-5 + d = 0 \Leftrightarrow d = 5$.

Conclusion : $M(x ; y ; z) \in (ABC) \Leftrightarrow 4x - 5y - 2z + 5 = 0$.

3. (a) Montrer que le point $G(7 ; -4 ; 4)$ appartient à la droite Δ .

Solution :

On cherche t tel que :

$$\begin{cases} 7 &= -1 + 4t \\ -4 &= 6 - 5t \\ 4 &= 8 - 2t \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} t &= 2 \\ t &= 2 \\ t &= 2 \end{cases}$$

On trouve donc bien une valeur de t convenable. On a donc bien $G \in \Delta$.

- (b) Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC) .

Solution :

Le point H appartient à la droite Δ et au plan (ABC) . Donc ses coordonnées x, y, z vérifient le système :

$$\begin{cases} x &= -1 + 4t \\ y &= 6 - 5t \\ z &= 8 - 2t \\ 4x - 5y - 2z + 5 &= 0 \end{cases} \text{ avec } t \in \mathbb{R}$$

En remplaçant x, y, z par leurs valeurs en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :

$$\begin{aligned} 4(-1 + 4t) - 5(6 - 5t) - 2(8 - 2t) + 5 &= 0 \Leftrightarrow -4 + 16t - 30 + 25t - 16 + 4t + 5 = 0 \\ &\Leftrightarrow 45t - 45 = 0 \\ &\Leftrightarrow 45t = 45 \\ &\Leftrightarrow t = 1 \end{aligned}$$

Les coordonnées de H sont donc $(-1 + 4 ; 6 - 5 ; 8 - 2)$ soit $H(3 ; 1 ; 6)$.

- (c) En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.

Solution :

La distance du point G au plan (ABC) est donc égale à GH .

$$\text{Or } GH = \sqrt{(3 - 7)^2 + (1 + 4)^2 + (6 - 4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}.$$

4. (a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A .

Solution :

On a $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times 2 + 2 \times 0 + 4 \times (-1) = 4 - 4 = 0$: les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonaux, donc les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires : le triangle ABC est donc rectangle en A .

- (b) Calculer le volume V du tétraèdre $ABCG$.

**Solution :**

En prenant comme base le triangle ABC , la hauteur correspondante est GH , donc :

$$V = \frac{1}{3} \times \mathcal{A}(ABC) \times GH = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times AB \times AC \times GH.$$

$$\text{On a } AB = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = 3;$$

$$AC = \sqrt{2^2 + 0^2 + 4^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}.$$

$$\text{Donc } V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5} = 15.$$