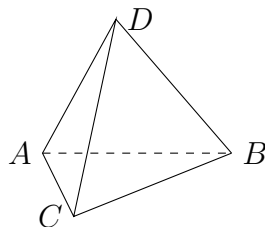


Fiche 6

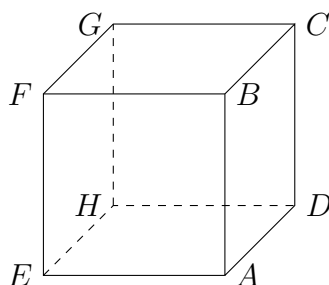
Orthogonalité de l'espace

Exercice 1: $ABCD$ est un tétraèdre régulier (c'est-à-dire que toutes ses faces sont des triangles équilatéraux). Le point I est le milieu de $[BD]$.



1. Montrer que la droite (DB) est orthogonale au plan (ACI) .
2. En déduire que les droites (DB) et (AC) sont orthogonales.

Exercice 2: Soit $ABCDEFGH$ un cube.



1. Montrer que les droites (FB) et (AC) sont orthogonales.
2. Montrer que les droites (EF) et (GC) sont orthogonales.

Exercice 3: On considère le cube $ABCDEFGH$ de côté a . Soient I et J les milieux respectifs de $[BF]$ et $[DH]$.

Calculer les produits scalaires suivants :

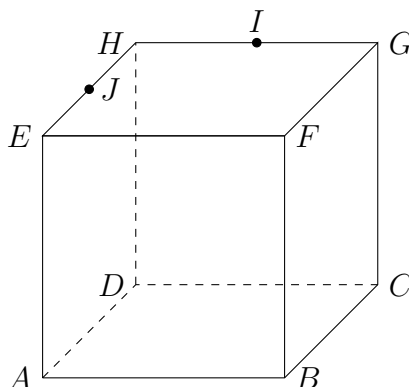
- a) $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AJ}$ b) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{GB}$ c) $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BF}$ d) $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BF}$

Exercice 4: Soient $ABCD$ un tétraèdre régulier d'arête de longueur a et I le milieu du côté $[BD]$. Montrer que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}a^2$.

Exercice 5: On se place dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, déterminer si les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

(a) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$ (b) $\vec{u} \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \\ 3 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \\ 4 \end{pmatrix}$	(c) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ (d) $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \sqrt{8} \end{pmatrix}$
--	---

Exercice 6: Soit $ABCDEFGH$ un cube.



On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

1. Déterminer les coordonnées de chacun des points de la figure.
2. Les droites (AI) et (CJ) sont-elles orthogonales ?
3. Les droites (AI) et (CJ) sont-elles perpendiculaires ?

Exercice 7: On considère le pavé droit $ABCDEFGH$ tel que $AB = 4$, $AE = 3$ et $AD = 12$. Le point L est le milieu de $[AG]$. On définit les vecteurs $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ par $\vec{i} = \frac{1}{4} \overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{12} \overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AE}$. On admet que le repère $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormé du plan.

1. (a) Donner les coordonnées des points B , C et G .
(b) Calculer les coordonnées du point L .
2. Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{LB} \cdot \overrightarrow{LC}$.
3. (a) Calculer les longueurs LB et LC .
(b) En déduire une valeur approchée de l'angle $\widehat{BLC}$ à $0,1$ degré près.

Exercice 8 :

1. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $A(1, -6, 2)$ et ayant $\vec{n} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}$ pour vecteur normale.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $B(5, \frac{3}{2}, 0)$ et parallèle au plan d'équation $-x + 2y - 4z - 3 = 0$.
3. On considère la droite $\mathcal{D}$ dont le système paramétrique est donnée par :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x &= -5 + 2t \\ y &= 1 - t \\ z &= -3 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Déterminer une équation cartésienne du plan passant par $C(-4, 1, -3)$ et orthogonal à la droite $\mathcal{R}$.

Exercice 9 : On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Déterminer une représentation paramétrique de la droite passant par $G(3; 3; 3)$ et orthogonale au plan $\mathcal{L}$ d'équation $x + 2y - 2z + 15 = 0$. En déduire les coordonnées du projeté orthogonal de G sur L .

Exercice 10 : On se place dans un repère orthonormé.

Soit d la droite passant par le point $A(1; -2; 1)$ et de vecteur directeur $\vec{u}(-3; 1; 4)$.

Déterminer les coordonnées du point H , projeté orthogonal du point $B(-15; -10; 4)$ sur la droite d .

Exercice 11 : On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le projeté orthogonal du point S sur le plan $\mathcal{R}$.

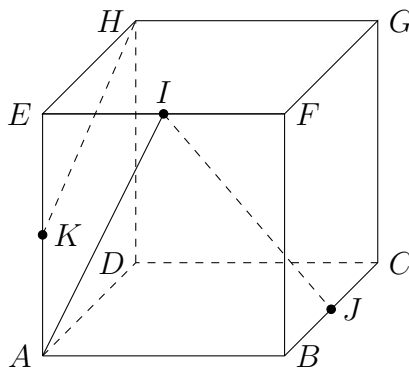
1. $S(1; -1; 0)$ et $\mathcal{R} : 2x - y - 16 = 0$.
2. $S(2; 1; 3)$ et $\mathcal{R} : x + y + z = 0$.

Exercice 12 : On considère les points $A(-3; 0; 0)$, $B(0; -3; 0)$, $C(0; 0; -3)$ et $D(-3; -3; 3)$. On admet que $ABCD$ est un tétraèdre régulier.

1. Prouver que $H(-2; -2; 1)$ est le projeté orthogonal du point C sur (ABD) .
2. Prouver que $G(-1; -2; 2)$ est le projeté orthogonal du point A sur (BCD) .
3. (a) Vérifier que le plan (ACD) admet pour équation $x - y - z + 3 = 0$.
(b) Déterminer les coordonnées du point F , projeté orthogonal de B sur le plan (ACD) .
4. (a) Prouver que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC) .
(b) Déterminer les coordonnées du point E , projeté orthogonal de D sur le plan (ABC) .
5. Justifier que $EFGH$ est un tétraèdre régulier.

Exercice 13 : (Type bac : Amérique du nord mai 2021)

On considère un cube $ABCDEFGH$. Le point I est le milieu du segment $[EF]$, le point J est le milieu du segment $[BC]$ et le point K est le milieu du segment $[AE]$.



1. Les droites (AI) et (KH) sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.

Dans la suite, on se place dans le repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

2. (a) Donner les coordonnées des points I et J .
 (b) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.

On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + 3y - 2z + 2 = 0$ ainsi que les droites d_1 et d_2 définies par les représentations paramétriques ci-dessous :

$$d_1 : \begin{cases} x = 3 + t \\ y = 8 - 2t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad d_2 : \begin{cases} x = 4 + t \\ y = 1 + t \\ z = 8 + 2t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

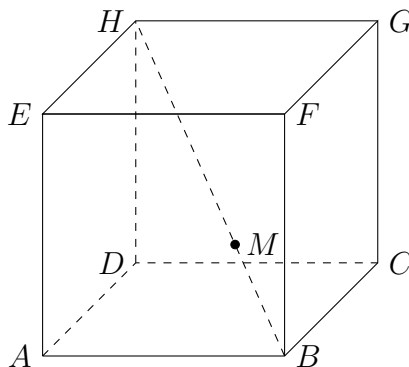
3. Les droites d_1 et d_2 sont-elles parallèles ? Justifier votre réponse.
 4. Montrer que la droite d_2 est parallèle au plan $\mathcal{P}$.
 5. Montrer que le point $L(4 ; 0 ; 3)$ est le projeté orthogonal du point $M(5 ; 3 ; 1)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Exercice 14 : (Type bac : Polynésie juin 2021)

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B , D , E , G et H .
2. (a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
- (b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4. (a) Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD) .

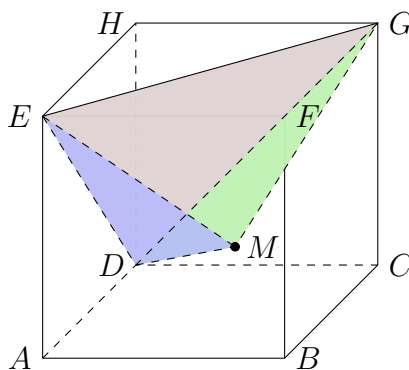
(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

(c) Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M .

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

5. Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide $GEDM$.



- (a) Soit K , le pied de la hauteur de la pyramide $GEDM$ issue du point M .

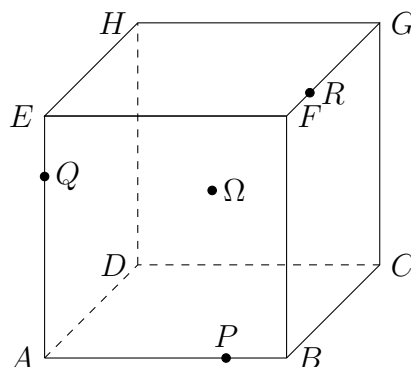
Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

- (b) En déduire le volume de la pyramide $GEDM$.

Exercice 15: (Type bac : Polynésie juin 2021)

On considère un cube $ABCDEFGH$ d'arête 8 cm et de centre Ω .

Les points P , Q et R sont définis par $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AQ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ et $\overrightarrow{FR} = \frac{1}{4}\overrightarrow{FG}$.



On se place dans le repère orthonormé $(A ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avec : $\vec{i} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{8}\overrightarrow{AE}$.

Partie I

1. Dans ce repère, on admet que les coordonnées du point R sont $(8 ; 2 ; 8)$.

Donner les coordonnées des points P et Q .

2. Montrer que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (PQR) .

3. Justifier qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est $x - 5y + z - 6 = 0$.

Partie II

On note L le projeté orthogonal du point Ω sur le plan (PQR) .

1. Justifier que les coordonnées du point Ω sont $(4 ; 4 ; 4)$.
2. Donner une représentation paramétrique de la droite d perpendiculaire au plan (PQR) et passant par Ω .
3. Montrer que les coordonnées du point L sont $\left(\frac{14}{3} ; \frac{2}{3} ; \frac{14}{3}\right)$.
4. Calculer la distance du point Ω au plan (PQR) .