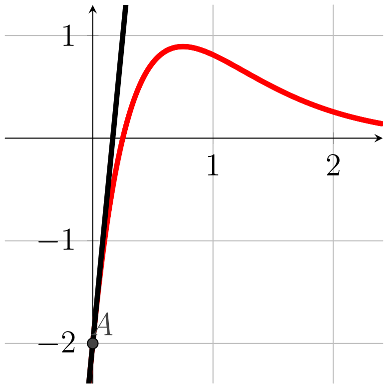
Fiche 5 bis

Étude de fonctions

Exercice 1 : Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-2x},$$

où a est un nombre réel.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\ ;\ -2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 12x - 2$.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f(0)$.
2. En déduire la valeur de b.
3. On admet ici que $b = -2$.
   (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ on a :
   $$f'(x) = (-2ax + a + 4)\mathrm{e}^{-2x}$$
   (b) Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f'(0)$.
   (c) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.
   (d) Donner l'expression de $f'(x)$.
4. (a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On pourra faire un tableau.
   (b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.
5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :
   $$f(x) = (8x-2)\mathrm{e}^{-2x}$$
   (a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?
   (b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
   On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Exercice 2 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 6\right) e^{2x}$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est :

$$f'(x) = (2x^2 + 2x - 12)e^{2x}$$

2. On note $p(x) = 2x^2 + 2x - 12$. Déterminer les racines du polynôme $p(x)$.
3. Déterminer les valeurs exactes, puis approchées à 10^{-2} près, des images par f de -3 et 2.
4. Compléter le tableau de variation suivant (on admet que la limite en $-\infty$ de f est 0, et que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$) :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$p(x)$	
e^{2x}	
$f'(x)$	
f	

5. Déterminer les solutions de l'équation :

$$f(x) = 0$$

6. Justifier que l'équation $f(x) = 3e^{-6}$ admet une unique solution, notée α sur l'intervalle $[\sqrt{6}, +\infty[$.
7. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ pour les différentes valeurs de k suivantes :
   (a) Si $k < -2e^4$
   (b) Si $k = -2e^4$
   (c) Si $-2e^4 < k < 0$
   (d) Si $k = 0$
   (e) Si $0 < k < 3e^{-6}$
   (f) Si $k = 3e^{-6}$
   (g) Si $3e^{-6} < k$

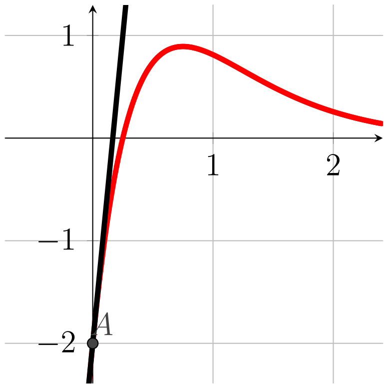
Fiche 5 bis

Correction

<u>Exercice 1 :</u> Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ par

$$f(x) = (ax + b)\mathrm{e}^{-2x},$$

où a est un nombre réel.
La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



Les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{D}$ passent toutes les deux par le point $A(0\ ;\ -2)$.
La droite $\mathscr{D}$ est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A et admet pour équation $y = 12x - 2$.

1. Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f(0)$.

Solution :
$f(0)$ correspond à l'image par f de 0, on l'obtient donc grâce au point $A(0\ ;\ -2)$.
On a donc : $f(0) = -2$.

2. En déduire la valeur de b.

Solution :
On a :
$f(0) = -2 \Rightarrow (a \times 0b)\mathrm{e}^0 = -2 \Rightarrow b = -2$.

3. On admet ici que $b = -2$.

   (a) Montrer que pour tout réel x de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ on a :

$$f'(x) = (-2ax + a + 4)\mathrm{e}^{-2x}$$

Solution :
La fonction est dérivable sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$ comme produit de fonctions dérivables sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On a :
$\forall x \in [0\ ;\ 5]$

$$\begin{aligned} f'(x) &= a\mathrm{e}^{-2x} + (ax-2)(-2\mathrm{e}^{-2x}) \\ &= (a-2(ax-2))\,\mathrm{e}^{-x} \\ &= (-2ax+a+4)\mathrm{e}^{-x} \end{aligned}$$

(b) Donner, à l'aide des informations ci-dessus et sans justifier la valeurs de $f'(0)$.

Solution :

$f'(0)$ correspond au coefficient directeur de la tangent au point d'abscisse 0, on l'obtient donc grâce à l'équation de $\mathscr{D}$. On a donc : $f'(0) = 12$.

(c) Déduire des questions précédentes que $a = 8$.

Solution :

On sait que $f'(0) = 12$:

$$\begin{aligned} f'(0) = 12 &\Leftrightarrow (-2a \times 0 + a + 4)\mathrm{e}^{-0} = 12 \\ &\Leftrightarrow a + 4 = 12 \\ &\Leftrightarrow a = 8 \end{aligned}$$

(d) Donner l'expression de $f'(x)$.

Solution :

On utilise la valeur de a :

$f'(x) = (-2 \times 8x + 8 + 4)\mathrm{e}^{-x} = (-16x + 12)\mathrm{e}^{-x}$

4. (a) Préciser le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0\ ;\ 5]$. On pourra faire un tableau.

Solution :

On obtient le tableau de variation en f sur $[0\ ;\ 5]$ intégrant le tableau de signe de la dérivée.

Le signe de $p(x) = -16x + 12$ est le signe d'une forme affine dont l'unique annulateur est $\frac{3}{4}$. On complète le tableau avec :

- $f(0) = -2$
- $f\left(\frac{3}{4}\right) = \left(8 \times \frac{3}{4} - 2\right)\mathrm{e}^{-2\times\frac{3}{4}} = 4\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$
- $f(5) = (8 \times 5 - 2)\,\mathrm{e}^{-2\times 5} = 38\mathrm{e}^{-10}$

x	0		$\frac{5}{4}$		5
$-8x+10$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	-2	$\nearrow$	$4e^{-\frac{3}{2}}$	$\searrow$	$38e^{-10}$

(b) En déduire le tableau des variations de la fonction f sur ce même intervalle.

Solution :

Voir question précédente.

5. Une entreprise fabrique des grille-pains. Après avoir fait une étude, son directeur constate que si l'entreprise fabrique chaque jour x milliers de grille-pains (où x est un nombre réel de l'intervalle $[0\ ;\ 5]$), alors le bénéfice quotidien est donné, en centaine de milliers d'euros, par la fonction f définie par :

$$f(x) = (8x-2)e^{-2x}$$

(a) Quelle quantité de grille-pains l'entreprise doit-elle fabriquer afin de réaliser un bénéfice maximal ?

Solution :

D'après l'étude précédente, elle doit fabriquer $x_0 = \frac{3}{4} = 0,75$ milliers de grille-pains, soit 750 grille-pains.

(b) Quel est alors la valeur de ce bénéfice maximal ?
On donnera une valeur approchée du résultat à l'euro près.

Solution :

Le bénéfice maximal est donc $4e^{-\frac{3}{2}} = 0.89252$ à 10^{-5} près, mais en centaine de milliers d'euros, soit 89 252 €. (ils sont en or ces grille-pains ? ? ?)

Exercice 2 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 6\right) e^{2x}$$

1. Montrer que la dérivée de la fonction f sur $\mathbb{R}$ est :

$$f'(x) = (2x^2 + 2x - 12)e^{2x}$$

Solution :

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x^2 \times e^{2x} + (x^2 - 6) \times 2e^{2x} \\ &= \left(2x^2 + 2x^2 - 12\right) e^{2x} \\ &= (2x^2 + 2x - 12)e^{2x} \end{aligned}$$

2. On note $p(x) = 2x^2 + 2x - 12$. Déterminer les racines du polynôme $p(x)$.

Solution :

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 2^2 - 4 \times 2 \times -12 = 100$, il y a donc deux racines réelles :

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 + 10}{4} = 2 \\ x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-2 - 10}{4} = -3 \end{cases}$$

3. Déterminer les valeurs exactes, puis approchées à 10^{-2} près, des images par f de -3 et 2.

Solution :

- $f(-3) = \left((-3)^2 - 6\right) e^{2(-3)} = 3e^{-6} = 0,01$ à 10^{-2} près.
- $f(2) = \left((2)^2 - 6\right) e^{2(2)} = -2e^4 = -109,19$ à 10^{-2} près.

4. Compléter le tableau de variation suivant (on admet que la limite en $-\infty$ de f est 0, et que la limite de f en $+\infty$ est $+\infty$) :

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$p(x)$	
e^{2x}	
$f'(x)$	
f	

Solution :

x	$-\infty$		-3		2		$+\infty$
$p(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{2x}		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$3e^{-6}$	$\searrow$	$-2e^4$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Déterminer les solutions de l'équation :

$$f(x) = 0$$

Solution :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\Leftrightarrow (x^2-6)\,e^{2x} = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6 = 0 \qquad \text{car } e^{2x} > 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{6} \qquad \text{ou } x = -\sqrt{6} \end{aligned}$$

Les solutions sont donc $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$

.

6. Justifier que l'équation $f(x) = 3e^{-6}$ admet une unique solution, notée α sur l'intervalle $[\sqrt{6}, +\infty[$.

Solution :

Sur l'intervalle $[\sqrt{6}, +\infty[$ la fonction est strictement croissante avec $f(\sqrt{6}) = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, de plus $3e^{-6} \in [0; +\infty[$ donc, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 3e^{-6}$ admet une unique solution sur cet intervalle.

7. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = k$ pour les différentes valeurs de k suivantes :

   (a) Si $k < -2e^4$

   Solution :

   Le minimum de la fonction est $-2e^4$. Donc l'équation $f(x) = k$ n'a pas de solution.

   (b) Si $k = -2e^4$

Solution :

Le minimum de la fonction est $-2e^4$. Donc l'équation $f(x) = k$ une unique solution : 2.

(c) Si $-2e^4 < k < 0$

Solution :

- Sur l'intervalle $]-\sqrt{6}, 2[$ la fonction est strictement décroissante avec $f(-\sqrt{6}) = 0$ et $f(2) = -2e^4$, donc l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur cet intervalle (d'après le corolaire du TVI).
- Sur l'intervalle $]2, \sqrt{6}[$ la fonction est strictement croissante avec $f(2) = -2e^4$ et $f(\sqrt{6}) = 0$, donc l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur cet intervalle (d'après le corolaire du TVI).

Donc il y a au total 2 solutions.

(d) Si $k = 0$

Solution :

On a déjà vu que l'équation $f(x) = 0$ a deux solutions : $\sqrt{6}$ et $-\sqrt{6}$.

(e) Si $0 < k < 3e^{-6}$

Solution :

- Sur l'intervalle $]-\infty, -3[$ la fonction est strictement croissante avec $\lim\limits_{x \to -\infty} = 0$ et $f(-3) = 3e^{-6}$, donc l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur cet intervalle (d'après le corolaire du TVI).
- Sur l'intervalle $]-3, -\sqrt{6}[$ la fonction est strictement décroissante avec $f(-3) = 3e^{-3}$ et $f(-\sqrt{6}) = 0$, donc l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur cet intervalle (d'après le corolaire du TVI).
- Sur l'intervalle $]\sqrt{6}, \alpha[$ la fonction est strictement croissante avec $f(\sqrt{6}) = 0$ et $f(\alpha) = 3e^{-6}$, donc l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur cet intervalle (d'après le corolaire du TVI).

Donc il y a au total 3 solutions.

(f) Si $k = 3e^{-6}$

Solution :

- Le maximum local de la fonction est $3e^{-6}$ sur $]-\infty; \sqrt{6}]$. Donc l'équation $f(x) = 3e^{-6}$ a une unique solution sur $]-\infty; \sqrt{6}]$.
- La question 6. nous donnais une unique solution sur $[\sqrt{6}; +\infty[$.

Donc il y a au total 2 solutions.

(g) Si $3e^{-6} < k$

Solution :

- Le maximum local de la fonction est $3e^{-6}$ sur $]-\infty;\alpha]$. Donc l'équation $f(x)=k$ n'a pas de solution sur $]-\infty;\alpha]$.
- Sur sur $[\alpha;+\infty[$ la fonction est strictement croissante avec $\lim\limits_{x\to+\infty}=+\infty$ et $f(\alpha)=3e^{-6}$, donc l'équation $f(x)=k$ admet une unique solution sur cet intervalle (d'après le corolaire du TVI).

Donc il y a au total 1 solutions.