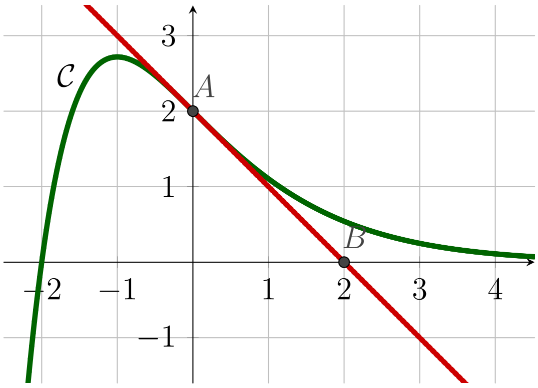
Fiche 5

Continuité

Exercice 1 : Exprimer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = (3x-4)e^{2x}$
2. $f_2(x) = \dfrac{2x+1}{5e^{-x}}$
3. $f_3(x) = \dfrac{3}{5+2e^{3x}}$
4. $f_4(x) = \dfrac{9}{(6-7x)^4}$

Exercice 2 : On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathcal{C}$ d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points $A(0\ ;\ 2)$ et $B(2\ ;\ 0)$.

Partie 1

Sachant que la courbe $\mathcal{C}$ passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point A, et que la tangente au point d'abscisse (-1) est horizontale, donner par lecture graphique (on justifiera les réponses) :

1. La valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
2. La valeur de $f'(-1)$.
3. Un intervalle sur lequel la fonction f' est positive.

Partie 2

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
2. Déterminer le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.(On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.)
3. Déterminer la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 : Déterminer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $f_1(x) = (3x^3 + 1)^5$
2. $f_2(x) = \dfrac{3}{(2 - 3e^x)^3}$
3. $f_3(x) = 3e^{-5x^2+3}$
4. $f_4(x) = 2\cos(x^2 + 5x + 1)$

Exercice 4 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 2x + 5 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ -x + 14 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

f est-elle continue en 3 ? Justifier.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto \begin{cases} 3e^x & \text{si} \quad x < 0 \\ 3 - 2x & \text{si} \quad x \in [0; 2[\\ \dfrac{-3}{x+1} & \text{si} \quad x \geq 2 \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : On considère une fonction f, définie et continue sur $[-5, 23]$, dont on donne le tableau de variation :

x	-5		2		14		23
f	8	$\searrow$	-7	$\nearrow$	5	$\searrow$	-1

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 6$.
2. Déterminer le nombre d'antécédents par f de -2.
3. Déterminer le nombre d'annulateurs de la fonction f.

Exercice 7 : On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (2x + 1)e^{-x}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f (on admet que $\lim\limits_{x \to -\infty} = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} = 0$)
2. Déterminer un tableau de valeur de la fonction, puis tracer la courbe $\mathcal{C}$.
3. On considère la droite $\Delta : y = x$. On cherche à déterminer les points d'intersection de $\mathcal{C}$ et Δ.
   (a) Étudier la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = f(x) - x$.
   (b) Justifier que la fonction $h(x)$ admet exactement 2 annulateurs noté α et β.
   (c) Déterminer une valeur approchée des points d'intersections.

Exercice 8 : Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 4$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2}{5}$.

1. Déterminer la fonction f telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer par récurrence que (u_n) est décroissante.
5. Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 9 : Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$ et (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier les variations de f. Justifier la continuité de la fonction sur $\mathbb{R}$.
2. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
3. (a) Montrer, par récurrence, que (u_n) est une suite positive et décroissante.
   (b) Déterminer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 10 : *(Type bac : Pondichéry avril 2003)*
On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2 e^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Partie I : Conjectures

Tracer la courbe de la fonction sur la calculatrice. À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant

1. le sens de variations de f sur $[-3\,;\ 2]$?
2. la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$?

Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures.

Partie B : contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et l'exprimer à l'aide de l'expression $g(x)$ où g est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.
2. Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   (a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (a) Étudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction f.
   (c) Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Partie B : contrôle de la deuxième conjoncture

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.
   (a) Calculer $h'(x)$ pour x élément de $[0\,;\,1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0\,;\,1]$.
   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. (a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe $(x'x)$.
   (b) Préciser alors la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
   (c) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?