

Fiche 4 +
Suites

Exercice 1 : Polynésie 5 mai 2022

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. (a) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.
(b) Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7.	<pre>def liste(k) : L = [] u = ... for i in range(0, k+1) : L.append(u) u = ... return(L)</pre>
--	---

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .
3. En déduire que la suite (u_n) converge.
4. Déterminer la valeur de sa limite.
5. (a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .
(b) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Exercice 2 : Polynésie 6 mai 2022

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 40 \\ u_{n+1} &= 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.
On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.
2. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 100]$ l'équation $f(x) = x$.

3. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0; 100]$ et dresser son tableau de variations.
- (b) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$

- (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
 - (d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
        n =n+1
        u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

Exercice 3 : Amérique du Nord 18 mai 2021

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

1. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.
- (b) Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .
- (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.
2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.
 - (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.
 - (c) Calculer la limite de la suite (T_n) .
 - (d) Résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel. (*Non faisable pour l'instant...*)
3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C .

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

- (a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.
- (b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T = 0.955 * T + 0.9
        n = n + 1
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temp(120)`.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Exercice 4 :

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = k u_n (1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

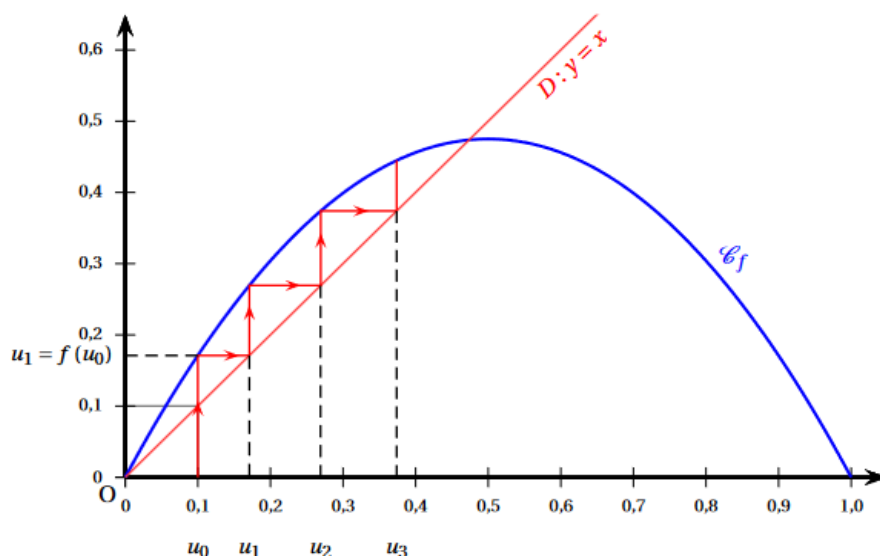
On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9 u_n (1 - u_n)$.

- On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.
 - Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.
 - En déduire que si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.
- Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.
Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



3. (a) En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

- (b) En déduire que la suite (u_n) converge.
(c) Déterminer sa limite.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.
2. On considère la fonction Python `algo (p)` où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :  
    u = 1/4  
    n = 0  
    while u > 10**(-p):  
        u = 1/2*u*(1 - u)  
        n = n+1  
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

Fiche 4+
 Correction

Exercice 1: Polynésie 5 mai 2022

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel n

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$$

1. (a) Calculer les termes u_1 , u_2 et u_3 . On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

 Solution :

$$u_0 = 1, u_1 = \frac{u_0}{1 + u_0} = \frac{1}{2}, u_2 = \frac{u_1}{1 + u_1} = \frac{1}{3}, u_3 = \frac{u_2}{1 + u_2} = \frac{1}{4}$$

- (b) Recopier le script python ci-dessous et compléter les lignes 3 et 6 pour que `liste(k)` prenne en paramètre un entier naturel k et renvoie la liste des premières valeurs de la suite (u_n) de u_0 à u_k .

```

1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = ...
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = ...
7.     return(L)
```

 Solution :

```

1. def liste(k) :
2.     L = []
3.     u = 1
4.     for i in range(0, k+1) :
5.         L.append(u)
6.         u = u/(1+u)
7.     return(L)
```

2. On admet que, pour tout entier naturel n , u_n est strictement positif.
Déterminer le sens de variation de la suite (u_n) .

 Solution :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{1 + u_n} - u_n \\
 &= \frac{u_n}{1 + u_n} - \frac{u_n(1 + u_n)}{1 + u_n} \\
 &= \frac{-u_n^2}{1 + u_n}
 \end{aligned}$$

• Avec $-u_n^2 < 0$ et $1 + u_n > 0$, donc $u_{n+1} - u_n < 0$, la suite (u_n) est donc décroissante.

3. En déduire que la suite (u_n) converge.

Solution :

On a une suite décroissante et minorée par 0. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, la suite est convergente.

4. Déterminer la valeur de sa limite.

Solution :

On sait que la suite converge, notons ℓ sa limite. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Sachant que l'on a $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_n}$, donc par opérations sur les limites, et par unicité de la limite, on a donc :

$$\ell = \frac{\ell}{1 + \ell}$$

$$\Leftrightarrow \ell(1 + \ell) = \ell$$

$$\Leftrightarrow \ell^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \ell = 0$$

On trouve donc $\ell = 0$.

5. (a) Conjecturer une expression de u_n en fonction de n .

Solution :

En reprenant la question 1. , on peut imaginer que la suite vérifie la relation :

$$u_n = \frac{1}{n+1}$$

(b) Démontrer par récurrence la conjecture précédente.

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n = \frac{1}{n+1}"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie :

• **Initialisation** : On a $u_0 = 1$ et $\frac{1}{1+0} = 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

• **Hérédité** : On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit

$$u_n = \frac{1}{n+1} \quad (\text{Hypothèse de récurrence}).$$

On a donc :

$$\begin{aligned}
 u_{n+1} &= \frac{u_n}{1 + \frac{1}{n+1}} \\
 &= \frac{n+1}{1 + \frac{1}{n+1}} \\
 &= \frac{n+1}{\frac{n+1+1}{n+1}} \\
 &= \frac{n+1}{\frac{n+2}{n+1}} \\
 &= \frac{(n+1)^2}{n+2}
 \end{aligned}$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 2 : Polynésie 6 mai 2022

Au début de l'année 2021, une colonie d'oiseaux comptait 40 individus. L'observation conduit à modéliser l'évolution de la population par la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$\begin{cases} u_0 &= 40 \\ u_{n+1} &= 0,008u_n(200 - u_n) \end{cases}$$

où u_n désigne le nombre d'individus au début de l'année $(2021 + n)$.

1. Donner une estimation, selon ce modèle, du nombre d'oiseaux dans la colonie au début de l'année 2022.



Solution :

On cherche donc u_1 :

$$\begin{aligned}
 u_1 &= 0,008u_0(200 - u_0) \\
 &= 0,008 \times 40(200 - 40) \quad \text{On peut donc estimer entre 51 et 52 oiseaux.} \\
 &= 51,2
 \end{aligned}$$

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 100]$ par $f(x) = 0,008x(200 - x)$.

2. Résoudre dans l'intervalle $[0 ; 100]$ l'équation $f(x) = x$.



Solution :

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x \\
 \Leftrightarrow 0,008x(200 - x) &= x \\
 \Leftrightarrow 0,008x(200 - x) - x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x(1,6 - 0,008x - 1) &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad 0,6 - 0,008x &= 0 \\
 \Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0,6}{0,008} &= 75 \\
 \text{On trouve donc deux solutions : } 0 &\text{ et } 75.
 \end{aligned}$$

3. (a) Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0 ; 100]$ et dresser son tableau de variations.

Solution :

La fonction est dérivable sur $[0 ; 100]$, comme fonction polynômiale, et on a :
 $f'(x) = 1.6 - 0.016x$

Il s'agit d'une fonction affine, avec un coefficient directeur négatif, dont l'annulateur est 100. La dérivée est donc positive sur $[0 ; 100]$, donc la fonction est bien croissante sur $[0 ; 100]$, avec $f(0) = 0$ et $f(100) = 80$.

- (b) En remarquant que, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = f(u_n)$ démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation** : On a $u_0 = 40$ et $u_1 = 51,2$. On a donc bien

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq 100$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité** : On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq 100$ (**Hypothèse de récurrence**).

On a donc, sachant que la fonction f est croissante sur $[0 ; 100]$:

$$\begin{aligned} f(0) &\leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f(100) \\ \Rightarrow 0 &\leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 80 \leq 100 \end{aligned}$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- (c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution :

D'après l'encadrement de la question précédente, on a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Donc la suite est croissante.

De plus elle est majorée par 100.

Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente.

- (d) Déterminer la limite ℓ de la suite (u_n) . Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution :

On sait que la suite converge, notons ℓ sa limite. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Sachant que l'on a $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par opérations sur les limites, et par unicité de la limite, on a donc :

$$\ell = f(\ell)$$

Donc ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$ qui admet 0 et 75 comme solution. Sachant que la suite est croissante avec $u_0 = 40$, donc 0 ne peut être la limite, on trouve donc $\ell = 75$.

On peut donc, suivant ce modèle, affirmer que le nombre d'oiseaux va, au bout de plusieurs années, se stabiliser à 75.

4. On considère l'algorithme suivant :

```
def seuil(p) :
    n=0
    u = 40
    while u < p :
        n =n+1
        u = 0.008*u*(200-u)
    return(n+2021)
```

L'exécution de `seuil(100)` ne renvoie aucune valeur. Expliquer pourquoi à l'aide de la question 3.

Solution :

La fonction boucle infiniment car la limite est 75, la suite ne dépassera jamais 100.

Exercice 3: Amérique du Nord 18 mai 2021

Dans cet exercice, on considère la suite (T_n) définie par :

$$T_0 = 180 \text{ et, pour tout entier naturel } n, T_{n+1} = 0,955T_n + 0,9$$

- (a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $T_n \geq 20$.

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "T_n \geq 20"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation** : On a $T_0 = 180$ et $180 \geq 20$. On a donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité** : On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $T_n \geq 20$ (**Hypothèse de récurrence**).

$$\begin{aligned}
 & T_n \geq 20 \\
 \Rightarrow & 0,955T_n \geq 19,1 \\
 \Rightarrow & 0,955T_n + 0,9 \geq 20 \\
 \Rightarrow & T_{n+1} \geq 20 \\
 & \text{Donc on a bien } \mathcal{P}_{n+1} \text{ est vraie.}
 \end{aligned}$$

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.

- (b) Vérifier que pour tout entier naturel n , $T_{n+1} - T_n = -0,045(T_n - 20)$. En déduire le sens de variation de la suite (T_n) .

Solution :

$$\begin{aligned}
 T_{n+1} - T_n &= 0,955T_n + 0,9 - T_n \\
 &= -0,045T_n + 0,9 \\
 &= -0,045 \left(T_n - \frac{0,9}{0,045} \right) \\
 &= -0,045(T_n - 20)
 \end{aligned}$$

Sachant que $T_n \geq 20$, donc $T_n - 20 \geq 0$, donc $T_{n+1} - T_n \leq 0$. La suite (T_n) est donc décroissante.

- (c) Conclure de ce qui précède que la suite (T_n) est convergente. Justifier.

Solution :

On a donc montré que la suite est décroissante et minorée par 20. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente.

2. Pour tout entier naturel n , on pose : $u_n = T_n - 20$.

- (a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

Solution :

$$\begin{aligned}
 \text{On a :} \\
 u_{n+1} &= T_{n+1} - 20 \\
 &= 0,955T_n + 0,9 - 20 \\
 &= 0,955T_n - 19,1 \\
 &= 0,955 \left(T_n - \frac{19,1}{0,955} \right) \\
 &= 0,955(T_n - 20) \\
 &= 0,955u_n
 \end{aligned}$$

La suite est donc bien géométrique de raison 0,955 et de premier terme $u_0 = T_0 - 20 = 160$.

- (b) En déduire que pour tout entier naturel n , $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$.

Solution :

La suite (u_n) étant géométrique, on dispose de la formule, pour tout entier naturel :

$$u_n = u_0 \times q^n = 160 \times 0,955^n$$

De plus $u_n = T_n - 20 \Leftrightarrow T_n = u_n + 20$.

• On a donc bien : $T_n = 20 + 160 \times 0,955^n$?

(c) Calculer la limite de la suite (T_n) .

Solution :

On a $-1 < 0,955 < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,955^n = 0$. Donc par opérations sur les limites, $\lim_{n \rightarrow +\infty} T_n = 20$.

(d) Résoudre l'inéquation $T_n \leq 120$ d'inconnue n entier naturel. (*Non faisable pour l'instant...*)

Solution :

$$\begin{aligned}
 T_n &\leq 120 \\
 \Leftrightarrow 20 + 160 \times 0,955^n &\leq 120 \\
 \Leftrightarrow 160 \times 0,955^n &\leq 100 \\
 \Leftrightarrow 0,955^n &\leq 0,625 \\
 \Leftrightarrow \ln(0,955^n) &\leq \ln(0,625) \\
 \Leftrightarrow n \ln(0,955) &\leq \ln(0,625) \\
 \Leftrightarrow n &\geq \frac{\ln(0,625)}{\ln(0,955)} \\
 \Leftrightarrow n &\geq 10,2 \\
 \text{Soit pour } n &\geq 11.
 \end{aligned}$$

3. Dans cette partie, on s'intéresse à l'évolution de la température au centre d'un gâteau après sa sortie du four.

On considère qu'à la sortie du four, la température au centre du gâteau est de 180°C et celle de l'air ambiant de 20°C .

La loi de refroidissement de Newton permet de modéliser la température au centre du gâteau par la suite précédente (T_n) . Plus précisément, T_n représente la température au centre du gâteau, exprimée en degré Celsius, n minutes après sa sortie du four.

(a) Expliquer pourquoi la limite de la suite (T_n) déterminée à la question 2. c. était prévisible dans le contexte de l'exercice.

Solution :

Naturellement la température du gâteau va tendre vers la température ambiante...

(b) On considère la fonction Python ci-dessous :

```
def temp(x) :
    T = 180
    n = 0
    while T > x :
        T=0.955*T+0.9
        n=n+1
    return n
```

Donner le résultat obtenu en exécutant la commande `temp(120)`.

Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.

Solution :

La boucle va s'exécuter tant que la température est au dessus de 120. D'après la résolution de l'inéquation, la boucle s'arrêtera à $n = 11$. Ce qui signifie qu'il faudra attendre 11 minutes pour que le gâteau est une température inférieure à 120 degré.

Exercice 4 :

Soit k un nombre réel.

On considère la suite (u_n) définie par son premier terme u_0 et pour tout entier naturel n ,

$$u_{n+1} = ku_n(1 - u_n).$$

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

On y étudie deux cas de figure selon les valeurs de k .

Partie 1

Dans cette partie, $k = 1,9$ et $u_0 = 0,1$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 1,9u_n(1 - u_n)$.

1. On considère la fonction f définie sur $[0 ; 1]$ par $f(x) = 1,9x(1 - x)$.

(a) Étudier les variations de f sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Solution :

La fonction f est dérivable sur $[0 ; 1]$ comme fonction polynômiale, et on a, pour tout x de $[0 ; 1]$:

$$f'(x) = 1,9 - 3,8x$$

Il s'agit donc d'une fonction affine, de coefficient directeur négatif, dont l'annulateur est $\frac{1}{2}$.

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$	+	0	-
f	0	0.475	0

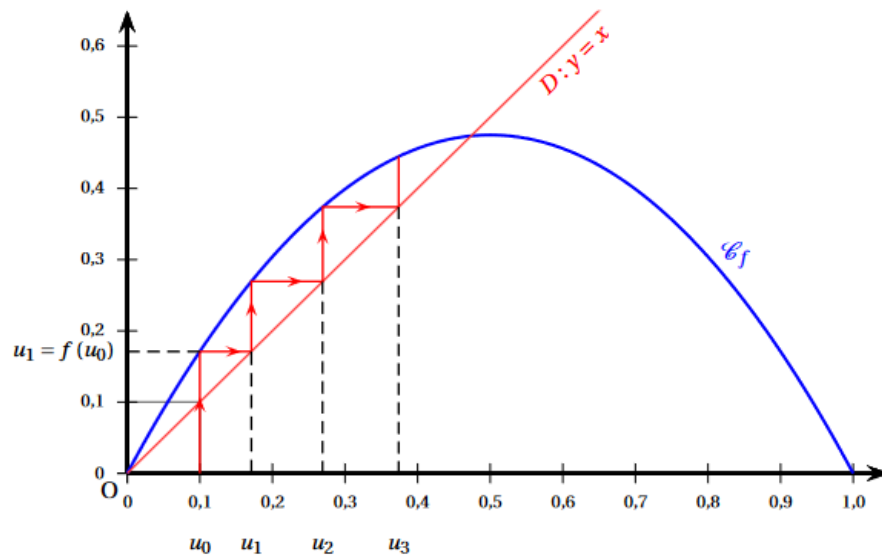
(b) En déduire que si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

Solution :

D'après le tableau de variation, la fonction admet donc 0 comme minimum et 0,475 comme maximum, on a donc bien si $x \in [0 ; 1]$ alors $f(x) \in [0 ; 1]$.

2. Ci-dessous sont représentés les premiers termes de la suite (u_n) construits à partir de la courbe $\mathcal{C}_f$ de la fonction f et de la droite D d'équation $y = x$.

Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n) et sa limite éventuelle.



Solution :

D'après la représentation graphique, la suite semble être croissante, convergente vers le point fixe.

3. (a) En utilisant les résultats de la question 1, démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 0.1$ et $u_1 = f(0.1) = 0.171$. On a donc bien

$$0 \leq u_0 \leq u_1 \leq \frac{1}{2}$$

Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

- **Hérédité** : On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $0 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{2}$ (**Hypothèse de récurrence**).

On a donc, sachant que la fonction f est croissante sur $\left[0; \frac{1}{2}\right]$:

$$f(0) \leq f(u_n) \leq f(u_{n+1}) \leq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq 0.475 \leq 0.5$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion** : D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n , $\mathcal{P}_n$ est vraie.

(b) En déduire que la suite (u_n) converge.

Solution :

D'après l'encadrement de la question précédente, on a :

$$u_n \leq u_{n+1}$$

Donc la suite est croissante.

De plus elle est majorée par $\frac{1}{2}$.

Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente.

(c) Déterminer sa limite.

Solution :

On sait que la suite converge, notons ℓ sa limite. On a donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} = \ell.$$

Sachant que l'on a $u_{n+1} = f(u_n)$, donc par opérations sur les limites, et par unicité de la limite, on a donc :

$$\ell = f(\ell)$$

Donc ℓ est une solution de l'équation $f(x) = x$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow 1,9x(1-x) = x$$

$$\Leftrightarrow x(0.9 - 1.9x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{0.9}{1.9}$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \quad \text{ou} \quad x = \frac{9}{19}$$

Sachant que la fonction est croissante et que $u_0 = 0.1$, la seule valeur possible est donc $\frac{9}{19}$.

Partie 2

Dans cette partie, $k = \frac{1}{2}$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On a donc, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n(1 - u_n)$ et $u_0 = \frac{1}{4}$.

On admet que pour tout entier naturel n : $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

1. Démontrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite.

**Solution :**

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ car $\frac{1}{2} \in]-1, 1[$.

Donc d'après le théorème des gendarmes, (ayant $0 \leq u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$) on peut donc dire que (u_n) converge vers 0.

2. On considère la fonction Python `algo (p)` où p désigne un entier naturel non nul :

```
def algo(p) :  
    u = 1/4  
    n = 0  
    while u > 10**(-p):  
        u = 1/2*u*(1 - u)  
        n = n+1  
    return(n)
```

Expliquer pourquoi, pour tout entier naturel non nul p , la boucle `while` ne tourne pas indéfiniment, ce qui permet à la commande `algo (p)` de renvoyer une valeur.

**Solution :**

La boucle s'arrête que on aura $u \leq 10^{-p}$, or sachant que la limite de (u_n) est 0, pour n'importe quelle valeur de p , il existe bien un rang N tel que $u \leq 10^{-p}$.