Fiche 4

Suites

Exercice 1 : Donner dans chacun des cas un contre exemple permettant de montrer que les propositions suivantes sont fausses :

1. Si (u_n) est une suite bornée, alors elle converge.
2. Si (u_n) est une suite croissante et majorée par M, alors elle converge vers M.
3. Si (u_n) admet pour limite $+\infty$, alors elle est croissante.
4. Si la suite (u_n) diverge, alors elle n'est pas bornée.

Exercice 2 : Soit (b_n) la suite définie par $b_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n,

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + n - 2$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 5$, $b_n \geq n - 3$.
2. En déduire la limite de la suite (b_n).

Exercice 3 : Soit (u_n) la suite définie, pour tout entier $n \geq 4$, par

$$u_n = \frac{2n + (-1)^n \cos(n)}{3 - n}$$

1. Pour tout entier $n \geq 4$, montrer que $\dfrac{2n+1}{3-n} \leq u_n \leq \dfrac{2n-1}{3-n}$.
2. (a) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n-1}{3-n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{3-n}$.

   (b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 4 : On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; 1]$ par :

$$f(x) = 2xe^{-x}$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0; 1]$.

1. (a) Démontrer que, pour tout x appartenant à l'intervalle $[0; 1]$,

   $$f'(x) = 2(1 - x)e^{-x}$$

   (b) Donner le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[0; 1]$.
   On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0,1$ et pour tout entier naturel n,

   $$u_{n+1} = f(u_n).$$

2. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout n entier naturel,

   $$0 \leqslant u_n < u_{n+1} \leqslant 1.$$

   (b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Exercice 5 : *D'après bac S, Nouvelle Calédonie, novembre 2013*
Soient (u_n) et (v_n) deux suites définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et, pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}$$

1. (a) Montrer que, pour tout entier naturel n :

$$v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$$

   (b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$. Montrer que, pour tout entier naturel n,

$$w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$$

2. (a) Montrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   (b) Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.
   (c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) convergent.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. (a) Montrer que la suite (t_n) définie, pour tout entier naturel n, par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
   (b) En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

Exercice 6 : *D'après bac S, Centres étrangers, juin 2018*
Un détaillant en fruits et légumes étudie l'évolution de ses ventes de melons afin de pouvoir anticiper ses commandes. Le détaillant réalise une étude sur ses clients. Il constate que :

- parmi les clients achetant un melon une semaine donnée, 90 % d'entre eux achètent un melon la semaine suivante ;
- parmi les clients n'achetant pas de melon une semaine donnée, 60 % d'entre eux n'achètent pas de melon la semaine suivante.

On choisit au hasard un client ayant acheté un melon au cours de la semaine 1 et, pour $n \geq 1$, on note A_n l'événement : « le client achète un melon au cours de la semaine n » et $p_n = P(A_n)$. On a ainsi $p_1 = 1$.

1. Démontrer que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,4$.
2. (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 1$, $p_n > 0,8$.
   (b) Démontrer que la suite (p_n) est décroissante.
   (c) La suite (p_n) est-elle convergente ?
3. On pose pour tout entier $n \geq 1$, $v_n = p_n - 0,8$.
   (a) Démontrer que (v_n) est une suite géométrique dont on donnera le premier terme v_1 et la raison.
   (b) Exprimer v_n en fonction de n. En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$p_n = 0,8 + 0,2 \times 0,5^{n-1}$$

   (c) Déterminer la limite de la suite (p_n).

Exercice 7 : *D'après Centres étrangers 2024*

Partie A

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x+1}.$$

On admet que cette fonction est dérivable sur ce même intervalle.

1. Démontrer que la fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$.
2. Démontrer que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$:

$$f(x) - x = \frac{-x^2+x+1}{\sqrt{x+1}+x}.$$

3. En déduire que sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution :

$$\ell = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 5$ et pour tout entier naturel n, par $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.
On admet que la suite de terme général u_n est bien définie pour tout entier naturel n.

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a

$$1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n.$$

2. En déduire que la suite (u_n) converge.
3. Démontrer que la suite (u_n) converge vers $\ell = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.
4. On considère le script Python ci-dessous :

```
from math import *
def seuil(n) :
    u = 5
    i = 0
    ℓ = (1 + sqrt(5))/2
    while abs(u-ℓ) >= 10**(-n) :
        u = sqrt(u+1)
        i = i+1
    return(i)
```

On rappelle que la commande **abs(x)** *renvoie la valeur absolue de x.*

(a) Donner la valeur renvoyée par `seuil` (2).

(b) La valeur renvoyée par `seuil` (4) est 9.
Interpréter cette valeur dans le contexte de l'exercice.

Exercice 8 : *D'après Métropole 2023*

Une entreprise a créé une Foire Aux Questions (« FAQ ») sur son site internet.

On étudie le nombre de questions qui y sont posées chaque mois.

Partie A : Première modélisation

Dans cette partie, on admet que, chaque mois :

- 90 % des questions déjà posées le mois précédent sont conservées sur la FAQ ;
- 130 nouvelles questions sont ajoutées à la FAQ.

Au cours du premier mois, 300 questions ont été posées.

Pour estimer le nombre de questions, en centaines, présentes sur la FAQ le n-ième mois, on modélise la situation ci-dessus à l'aide de la suite (u_n) définie par :

$$u_1 = 3 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n \geqslant 1,\ u_{n+1} = 0,9u_n + 1,3.$$

1. Calculer u_2 et u_3 et proposer une interprétation dans le contexte de l'exercice.
2. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = 13 - \frac{100}{9} \times 0,9^n.$$

   1. En déduire que la suite (u_n) est croissante.
   2. On considère le programme ci-contre, écrit en langage Python.

      Déterminer la valeur renvoyée par la saisie de seuil(8.5) et l'interpréter dans le contexte de l'exercice.

```
def seuil(p) :
    n=1
    u=3
    while u<=p :
        n=n+1
        u=0.9*u+1.3
    return n
```

Partie B : Une autre modélisation

Dans cette partie, on considère une seconde modélisation à l'aide d'une nouvelle suite (v_n) définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par :

$$v_n = 9 - 6 \times \mathrm{e}^{-0,19\times(n-1)}.$$

Le terme v_n est une estimation du nombre de questions, en centaines, présentes le n-ième mois sur la FAQ.

1. Préciser les valeurs arrondies au centième de v_1 et v_2.
2. Déterminer, en justifiant la réponse, la plus petite valeur de n telle que $v_n > 8,5$.

Partie C : Comparaison des deux modèles

1. L'entreprise considère qu'elle doit modifier la présentation de son site lorsque plus de 850 questions sont présentes sur la FAQ.

   Parmi ces deux modélisations, laquelle conduit à procéder le plus tôt à cette modification ?

   Justifier votre réponse.
2. En justifiant la réponse, pour quelle modélisation y a-t-il le plus grand nombre de questions sur la FAQ à long terme ?