Fiche 2 ++

Suites

Exercice 1 : *Applications des opérations sur les limites :*

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

1. $u_n = n^2 + 3n + 2$
2. $u_n = 3 - \dfrac{7}{2n^2}$
3. $u_n = \dfrac{5}{2n^2 - 3}$
4. $u_n = (2 - n^2)(3n - 7)$
5. $u_n = \left(5 + \dfrac{2}{n^2}\right)\left(\dfrac{7}{2n+1} - 3\right)$

Exercice 2 : *Formes indéterminées :*

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

1. $u_n = n^2 - 3n + 5$
2. $u_n = \dfrac{5n - 7}{3n^2 - 4}$
3. $u_n = \dfrac{3n^2 - n + 2}{5n^2 - 7n + 5}$

Exercice 3 : *Suites géométriques :*

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

1. $u_n = \left(\dfrac{5}{7}\right)^n + 3$
2. $u_n = -3\left(\dfrac{3}{2}\right)^n - 8$
3. $u_n = 8^n - 5^n$
4. $u_n = \dfrac{9^{n-1} + 1}{2^n + 5 \times 3^{2n+1}}$

Fiche 2++

Correction

Exercice 1 : *Applications des opérations sur les limites :*
Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

1. $u_n = n^2 + 3n + 2$

Solution :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n = +\infty\end{array}\right\}\text{Donc par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} n^2+3n+2 = +\infty$$

2. $u_n = 3 - \dfrac{7}{2n^2}$

Solution :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{2n^2} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3\end{array}\right\}\text{Donc par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} 3-\dfrac{7}{2n^2} = 3$$

3. $u_n = \dfrac{5}{2n^2-3}$

Solution :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2-3 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 5 = 5\end{array}\right\}\text{Donc par quotient } \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{2n^2-3} = 0$$

4. $u_n = (2-n^2)(3n-7)$

Solution :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 2-n^2 = -\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 3n-7 = +\infty\end{array}\right\}\text{Donc par produit } \lim\limits_{n\to+\infty} (2-n^2)(3n-7) = -\infty$$

5. $u_n = \left(5+\dfrac{2}{n^2}\right)\left(\dfrac{7}{2n+1}-3\right)$

Solution :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n^2} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 5+\dfrac{2}{n^2} = 5$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n+1 = \infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{2n+1} = 0$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{7}{2n+1} - 3 = -3$

Donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(5+\dfrac{2}{n^2}\right)\left(\dfrac{7}{2n+1}-3\right)=-15$

<u>Exercice 2 :</u> *Formes indéterminées :*

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

1. $u_n=n^2-3n+5$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (somme d'infinis de signes différents...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$u_n=n^2-3n+5=n^2\left(1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)$.

On a ainsi levé la forme indéterminée :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} n^2=+\infty\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{3}{n}=0\\ \lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5}{n^2}=0\end{array}\right\}\text{Donc par somme }\lim\limits_{n\to+\infty}1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}=1\end{array}\right\}$$

Donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty}n^2\left(1-\dfrac{3}{n}+\dfrac{5}{n^2}\right)=+\infty$

2. $u_n=\dfrac{5n-7}{3n^2-4}$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (quotient d'infinis ...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$$u_n=\frac{5n-7}{3n^2-4}=\frac{n\left(5-\frac{7}{n}\right)}{n^2\left(3-\frac{4}{n^2}\right)}=\frac{5-\frac{7}{n}}{n\left(3-\frac{4}{n^2}\right)}.$$

On a ainsi levé la forme indéterminée :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{7}{n}=0\text{ Donc par somme }\lim\limits_{n\to+\infty}5-\dfrac{7}{n}=5\\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty}3-\dfrac{4}{n^2}=3\\ \lim\limits_{n\to+\infty}n=+\infty\end{array}\right\}\\ \text{Donc par produit }\lim\limits_{n\to+\infty}n\left(3-\dfrac{4}{n^2}\right)=+\infty\end{array}\right\}$$

Donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{5-\frac{7}{n}}{n\left(3-\frac{4}{n^2}\right)}=0$

3. $u_n=\dfrac{3n^2-n+2}{5n^2-7n+5}$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (quotient d'infinis ...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$$u_n = \frac{3n^2 - n + 2}{5n^2 - 7n + 5} = \frac{n^2\left(3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(5 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}\right)} = \frac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}}.$$

On a ainsi levé la forme indéterminée :

- Pour le numérateur : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{n^2} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2} = 3$.
- Pour le dénominateur : $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{5}{n^2} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2} = 5$.

Donc, par quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{3 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{5 - \frac{7}{n} + \frac{5}{n^2}} = \dfrac{3}{5}$.

<u>Exercice 3 :</u> *Suites géométriques :*

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

1. $u_n = \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3$

Solution :

Sachant que $-1 < \frac{5}{7} < 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n = 0$. Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{5}{7}\right)^n + 3 = 3$

2. $u_n = -3\left(\frac{3}{2}\right)^n - 8$

Solution :

Sachant que $1 < \frac{3}{2}$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^n = +\infty$. Donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\left(\frac{3}{2}\right)^n = -\infty$, et enfin par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} -3\left(\frac{3}{2}\right)^n - 8 = -\infty$

3. $u_n = 8^n - 5^n$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (différence d'infinis ...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :
$u_n = 8^n - 5^n = 8^n\left(1-\left(\frac{5}{8}\right)^n\right)$ Sachant que $-1 < \frac{5}{8} < 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{5}{8}\right)^n = 0$. Donc par somme
$\lim\limits_{n\to+\infty} 1-\left(\frac{5}{8}\right)^n = 1$, et enfin par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 8^n\left(1-\left(\frac{5}{8}\right)^n\right) = +\infty$

4. $u_n = \dfrac{9^{n-1}+1}{2^n+5\times 3^{2n+1}}$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (quotient d'infinis ...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$$\begin{aligned}
u_n &= \frac{9^{n-1}+1}{2^n+5\times 3^{2n+1}}\\
&= \frac{9^n\times 9^{-1}+1}{2^n+5\times 3^{2n}\times 3^1}\\
&= \frac{9^n\left(9^{-1}+\frac{1}{9^n}\right)}{3^{2n}\left(\frac{2^n}{3^{2n}}+5\times 3^1\right)}\\
&= \frac{9^n\left(\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^n\right)}{9^n\left(\left(\frac{2}{9}\right)^n+15\right)} \qquad \text{car } 3^{2n}=(3^2)^n=9^n\\
&= \frac{\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\left(\frac{2}{9}\right)^n+15}
\end{aligned}$$

Sachant que $-1 < \frac{1}{9} < 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n = 0$ et $-1 < \frac{2}{9} < 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n = 0$. Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^n = \frac{1}{9}$, et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{2}{9}\right)^n+15 = 15$

enfin par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^n}{\left(\frac{2}{9}\right)^n+15}) = \dfrac{\frac{1}{9}}{15} = \dfrac{1}{135}$