Fiche 2 +

Suites

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n + 2} \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

3. Montrer que l'on a, pour $x > 0$:

$$\frac{2x}{3x+2} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3x+2}\right)$$

4. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$$

5. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2}{3n+1}$$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n + 1} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

2. On définie sur $I =]0;1[$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

   Étudier les variations de la fonction f.

3. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$$

4. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
5. Faire une conjecture sur l'expression du terme générale de la suite.
6. Démontrer cette conjecture.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 8 \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$$

3. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5^n + 2$$

Fiche 2+

Correction

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{3u_n + 2} \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :

$u_0 = 2$, $u_1 = \dfrac{2u_0}{3u_0+2} = \dfrac{2\times 2}{3\times 2+2} = \dfrac{1}{2}$, $u_2 = \dfrac{2u_1}{3u_1+2} = \dfrac{2}{7}$,$u_3 = \dfrac{2u_2}{3u_2+2} = \dfrac{1}{5}$, $u_4 = \dfrac{2u_3}{3u_3+2} = \dfrac{2}{13}$.

2. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n > 0"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 2$ et $3 > 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n > 0$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :
  $$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow 2u_n > 0 \text{ et } 3u_n + 2 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{2u_n}{3u_n+2} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3. Montrer que l'on a, pour $x > 0$:

$$\frac{2x}{3x+2} = \frac{2}{3}\left(1 - \frac{2}{3x+2}\right)$$

Solution :

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned}\frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3x+2}\right) &= \frac{2}{3}\left(\frac{3x+2}{3x+2}-\frac{2}{3x+2}\right)\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{3x}{3x+2}\right)\\ &= \frac{2x}{3x+2}\end{aligned}$$

4. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 2$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n \leq 2"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 2$ et $2 \leq 2$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n \leq 2$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :
  $$\begin{aligned}u_n \leq 2 &\Rightarrow 3u_n+2 \leq 8\\ &\Rightarrow \frac{1}{3u_n+2} \geq \frac{1}{8}\\ &\Rightarrow -\frac{2}{3u_n+2} \leq -\frac{1}{4}\\ &\Rightarrow 1-\frac{2}{3u_n+2} \leq \frac{3}{4}\\ &\Rightarrow \frac{2}{3}\left(1-\frac{2}{3u_n+2}\right) \leq \frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\\ &\Rightarrow u_{n+1} \leq \frac{1}{2}\\ &\Rightarrow u_{n+1} \leq 2\end{aligned}$$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

5. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{2}{3n+1}$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n = \frac{2}{3n+1}\text{"}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 2$ et $\dfrac{2}{3\times 0+1} = 2$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n = \dfrac{2}{3n+1}$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :
  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{2u_n}{3u_n+2} && \text{(par définition)} \\ &= \frac{2\times\frac{2}{3n+1}}{3\times\frac{2}{3n+1}+2} && \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{4}{6+2(3n+1)} \\ &= \frac{2}{3n+4} \\ &= \frac{2}{3(n+1)+1} \end{aligned}$$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2u_n+1} \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n > 0\text{"}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 1$ et $1 > 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n > 0$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :

$$\begin{array}{rcl} u_n > 0 & \Rightarrow & u_n > 0 \text{ et } 2u_n + 1 > 0 \\ & \Rightarrow & \dfrac{u_n}{2u_n+1} > 0 \\ & \Rightarrow & u_{n+1} > 0 \end{array}$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

2. On définie sur $I =]0;1[$ la fonction f par :

$$f(x) = \frac{x}{2x+1}$$

Étudier les variations de la fonction f.

Solution :

La fonction f est dérivable sur I (en tant que quotient de fonctions dérivables sur I, dont le dénominateur ne s'annule pas) , et on a :

$$\begin{array}{rcl} f'(x) & = & \dfrac{1 \times (2x+1) - 2 \times x}{(2x+1)^2} \\ & = & \dfrac{1}{(2x+1)^2} \end{array}$$

On a donc $f'(x) > 0$ sur I. La fonction f est donc strictement croissante sur I.

3. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq 1$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n \leq 1"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 1$ et $1 \leq 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n \leq 1$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc, sachant que la fonction f est croissante :
  $$\begin{array}{rcl} u_n \leq 1 & \Rightarrow & f(u_n) \leq f(1) \\ & \Rightarrow & u_{n+1} \leq \dfrac{1}{3} \\ & \Rightarrow & u_{n+1} \leq 1 \end{array}$$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

4. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :

- $u_0 = 1$
- $u_1 = \dfrac{u_0}{2u_0+1} = \dfrac{1}{3}$
- $u_2 = \dfrac{u_1}{2u_1+1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{2\times\frac{1}{3}+1} = \dfrac{1}{5}$
- $u_3 = \dfrac{u_2}{2u_2+1} = \dfrac{\frac{1}{5}}{2\times\frac{1}{5}+1} = \dfrac{1}{7}$
- $u_4 = \dfrac{u_3}{2u_3+1} = \dfrac{\frac{1}{7}}{2\times\frac{1}{7}+1} = \dfrac{1}{9}$

5. Faire une conjecture sur l'expression du terme générale de la suite.

Solution :

Il semble que les termes de la suite soient les inverses des nombres impairs. Soit :

$$u_n = \frac{1}{2n+1}$$

6. Démontrer cette conjecture.

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{"} u_n = \frac{1}{2n+1} \text{"}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 1$ et $\dfrac{1}{2\times 0+1} = 1$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n = \dfrac{1}{2n+1}$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{u_n}{2u_n+1} && \text{(par définition)} \\ &= \frac{\frac{1}{2n+1}}{2\times\frac{1}{2n+1}+1} && \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= \frac{1}{2+2n+1} \\ &= \frac{1}{2n+3} \\ &= \frac{1}{2(n+1)+1} \end{aligned}$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 5u_n - 8 \end{cases}$$

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :

On a : $u_0 = 3$, $u_1 = 5u_0 - 8 = 7$, $u_2 = 5u_1 - 8 = 27$, $u_3 = 5u_2 - 8 = 127$, $u_4 = 5u_3 - 8 = 627$.

2. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 3$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n \geq 3"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 3$ et $3 \geq 3$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n \geq 3$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :
  $$\begin{aligned} u_n \geq 3 &\Rightarrow 5u_n \geq 15 \\ &\Rightarrow 5u_n - 8 \geq 7 \\ &\Rightarrow u_{n+1} \geq 3 \end{aligned}$$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 5^n + 2$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n = 5^n + 2"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 3$ et $5^0 + 2 = 3$. Donc $\mathcal{P}_n$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n = 5^n + 2$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :
  $$\begin{aligned} u_{n+1} &= 5u_n - 8 && \text{(par définition)} \\ &= 5 \times (5^n + 2) - 8 && \text{(Hypothèse de récurrence)} \\ &= 5^{n+1} + 10 - 8 \\ &= 5^{n+1} + 2 \end{aligned}$$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.