Fiche 2

Suites

Exercice 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 4 \\ u_{n+1} = u_n + 2n + 5 \end{cases}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.
2. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n - n^2.$$

   a Calculer les 5 premiers termes de la suite (v_n).

   b Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $R = 4$.
3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.
4. En déduire que l'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = (n+2)^2$$

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$\begin{cases} & u_0 & = & 5 \\ \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} & = & u_n + 2 \end{cases}$$

1. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 5 + 2n$$

2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} u_n = n^2 + 6n + 5$$

Exercice 3 : On considère la suite (u_n) définie par la relation :

$$\begin{cases} & u_0 & = & 2 \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, & u_n & = & 3u_{n-1} - 2 \end{cases}$$

1. Déterminer les 5 premiers termes de la suites.
2. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$u_n = 3^n + 1$$

Exercice 4 : Montrer par récurrence les égalités suivantes :

(a) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

(b) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$

(c) $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{3^{n+1} - 1}{2}$$

Exercice 5 : Déterminer la limite des suites suivantes :

(a) $u_n = n^2 - 3$

(b) $u_n = \dfrac{8}{3n+1}$

(c) $u_n = 3n - \dfrac{4}{n}$

(d) $u_n = \dfrac{2-n}{1+\dfrac{2}{n^2}}$

(e) $u_n = -5n^2 - 2n + 3$

(f) $u_n = \dfrac{9+\dfrac{2}{n}}{3+\dfrac{4}{n^2}}$

Exercice 6 : Déterminer la limite des suites suivantes :

(a) $u_n = 4n^2 - 3n + 5$

(b) $u_n = \dfrac{n+2}{5n-7}$

(c) $u_n = \dfrac{n^2-2n+1}{n^2+8}$

(d) $u_n = \dfrac{2-n}{2n^2-n+5}$

(e) $u_n = -3n^2 + 2n + \dfrac{5}{n}$

(f) $u_n = \dfrac{3n^3-n+1}{8n+4}$

Exercice 7 :

1. Montrer par récurrence l'inégalité de Bernoulli, pour tout entier $n > 1$, pour tout réel $x > 0$:
$$(1+x)^n > 1 + nx$$
2. Retrouver la limite d'une suite géométrique de raison strictement supérieur à 1.

Exercice 8 : Déterminer la limite des suites suivantes :

(a) $u_n = 5^n + 1$

(b) $u_n = 3^n - 4^n$

(c) $u_n = \dfrac{2^n-5}{3^n+1}$

(d) $u_n = \dfrac{3^{n+2}-2}{3^{n-1}+4}$