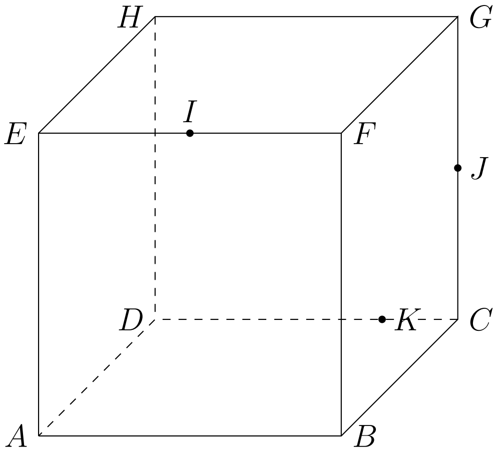
Fiche 1 +

Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : On considère un cube $ABCDEFGH$.
I et J milieux respectifs de $[EF]$ et $[CG]$. On note K le point tel que

$$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$$



On cherche ici à savoir, par deux méthodes, si les droites (AJ) et JK sont sécantes.

Partie A

1. Déterminer une combinaison linéaire du vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
2. Déterminer une combinaison linéaire du vecteur $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.
3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires.
4. Démontrer que les droites (AJ) et JK sont sécantes

Partie B

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

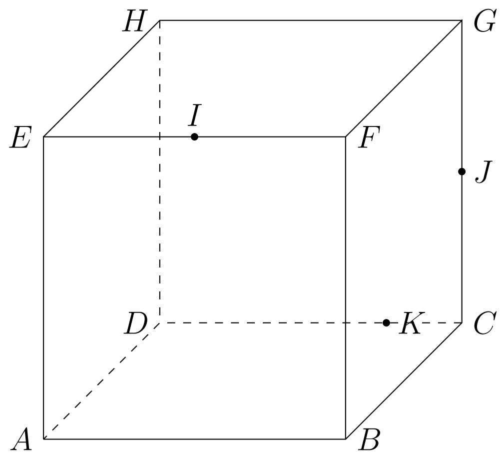
1. Déterminer, sans les justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.
2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).
3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IK).
4. En déduire les coordonnées du point M, intersection de (AJ) et (IK).

Fiche 1+

Correction

Exercice 1 : On considère un cube $ABCDEFGH$.
I et J milieux respectifs de $[EF]$ et $[CG]$. On note K le point tel que

$$\overrightarrow{CK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{CD}$$



On cherche ici à savoir, par deux méthodes, si les droites (AJ) et JK sont sécantes.

Partie A

1. Déterminer une combinaison linéaire du vecteur $\overrightarrow{AI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EI}\\ &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EF}\\ &= \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

2. Déterminer une combinaison linéaire du vecteur $\overrightarrow{KJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Solution :

On a :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{KJ} &= \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{CJ}\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CG}\\ &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

3. En déduire que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires.

Solution :

D'après les questions précédentes, on a :

$$\overrightarrow{KJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AI}$$

Les vecteurs sont donc colinéaires.

4. Démontrer que les droites (AJ) et JK sont sécantes

Solution :

Les droites (AI) et (KJ) sont parallèles (d'après la question précédente). Donc les points A, I , K et J sont coplanaires. Les droites (AJ) et JK le sont donc aussi. Or elles ne sont pas parallèles, elles sont donc bien sécantes.

Partie B

On se place dans le repère $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

1. Déterminer, sans les justifier, les coordonnées de tous les points de la figure.

Solution :

On a : $A(0,0,0)$, $B(1,0,0)$, $C(1,1,0)$, $D(0,1,0)$, $E(0,0,1)$, $F(1,0,1)$, $G(1,1,1)$, $H(0,1,1)$, $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$, $J\left(1,1,\frac{1}{2}\right)$ et $K\left(\frac{3}{4},1,0\right)$.

2. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AJ).

Solution :

On a $A(0,0,0)$ et $\overrightarrow{AJ}\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$.

On peut donc proposer la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & \frac{1}{2}t \end{array}\right. \quad , t \in \mathbb{R}$$

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IK).

Solution :

On a $I\left(\frac{1}{2},0,1\right)$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\\1-0\\0-1\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}\frac{1}{4}\\1\\-1\end{pmatrix}$.

On peut donc proposer la représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}t' \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \quad , t' \in \mathbb{R}$$

4. En déduire les coordonnées du point M, intersection de (AJ) et (IK).

Solution :

Pour obtenir l'existence d'un point appartenant aux deux droites, il faut trouver deux paramètres t et t' vérifiant les deux systèmes :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t \\ y & = & t \\ z & = & \frac{1}{2}t \end{array}\right. \quad , t \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}t' \\ y & = & t' \\ z & = & 1-t' \end{array}\right. \quad , t' \in \mathbb{R}$$

Ce qui donne forcément $t = t'$. Il faut donc vérifier que les deux autres équations sont cohérentes :

$$\left\{\begin{array}{rcl} t & = & \frac{1}{2}+\frac{1}{4}t \\ \frac{1}{2}t & = & 1-t' \end{array}\right. \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

On trouve donc

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & \frac{2}{3} \\ y & = & \frac{2}{3} \\ z & = & \frac{1}{3}t \end{array}\right.$$

Donc le point M a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.