

Fiche 12 bis

Calcul intégrale

Exercice 1 : (*Extrait bac Métropole juin 2024*)

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.
 (b) Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.
 (c) Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.
 (d) Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.
2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.
 (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.
 (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0 ; 1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0 ; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.
2. (a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left]0 ; \frac{1}{\alpha}\right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.
 (b) On admet le tableau de signes suivant :

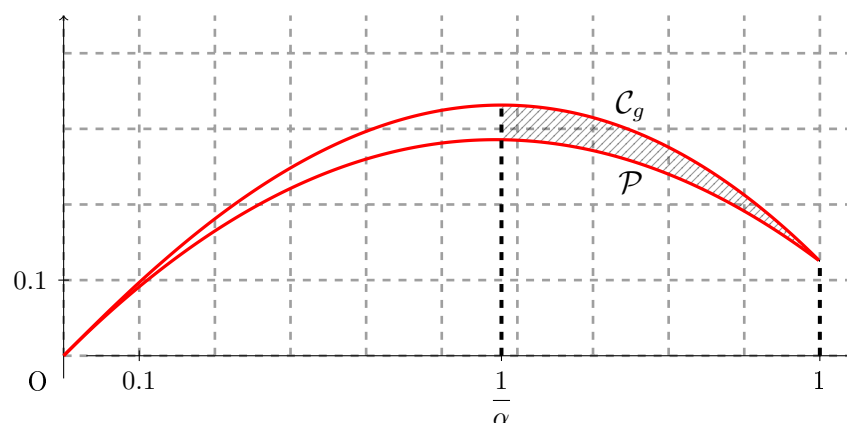
x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0 -

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

- (a) Justifier la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.
- (b) Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

- En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.

Fiche 12 bis

Correction extrait de l'APMEP

Exercice 1 : (Extrait bac Métropole juin 2024)

Partie A : étude de la fonction f

La fonction f est définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = x - 2 + \frac{1}{2} \ln x,$$

où $\ln$ désigne la fonction logarithme népérien. On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$, on note f' sa dérivée et f'' sa dérivée seconde.

1. (a) Déterminer, en justifiant, les limites de f en 0 et en $+\infty$.

Solution :

• Limite en 0 : On sait que $\lim_{x \rightarrow 0^+} x - 2 = -2$ et que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$, donc par somme de limites $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$.

• Limite en plus l'infini :

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$, d'où par somme de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- (b) Montrer que pour tout x appartenant à $]0 ; +\infty[$, on a : $f'(x) = \frac{2x+1}{2x}$.

Solution :

Sur l'intervalle de définition f est une somme de fonctions dérivables et sur cet intervalle :

$$f'(x) = 1 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}.$$

- (c) Étudier le sens de variation de f sur $]0 ; +\infty[$.

Solution :

On a successivement : $0 < x \Rightarrow 0 < 2x < 2x+1$ et

$2x+1 > 2x > 0 \Rightarrow \frac{2x+1}{2x} > 1 > 0$: donc $f'(x) > 1 > 0$: $f'(x) > 0$ donc f est croissante sur $]0 ; +\infty[$ de moins l'infini à plus l'infini.

- (d) Étudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$.

Solution :

f' est elle-même dérivable sur $]0 ; +\infty[$ et sur cet intervalle, en dérivant la somme $1 + \frac{1}{2x}$ on obtient :

$$f''(x) = 0 + \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right) = -\frac{1}{2x^2}.$$

Or $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0 \Rightarrow 2x^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2x^2} > 0$ et enfin $f''(x) < 0$.

Conclusion : la fonction f est concave sur $]0 ; +\infty[$

2. (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans $]0 ; +\infty[$ une solution unique qu'on notera α et justifier que α appartient à l'intervalle $[1 ; 2]$.

Solution :

Sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$, la fonction f est continue car dérivable sur cet intervalle et strictement croissante de moins à plus l'infini : d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in]0 ; +\infty[$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Comme $f(1) = 1 - 2 + 0,5 \times \ln 1 = -1$ et

$f(2) = 2 - 2 + \frac{\ln 2}{2} = \frac{\ln 2}{2} > 0$, le même théorème appliqué à l'intervalle $[1 ; 2]$ montre que $\alpha \in [1 ; 2]$.

- (b) Déterminer le signe de $f(x)$ pour $x \in]0 ; +\infty[$.

Solution :

On a donc :

- $f(x) < 0$ sur $]0 ; \alpha[$;
- $f(x) > 0$ sur $]\alpha ; +\infty[$;
- $f(\alpha) = 0$.

- (c) Montrer que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

Solution :

Le dernier résultat s'écrit :

$$\alpha - 2 + \frac{1}{2} \ln \alpha = 0 \iff \frac{1}{2} \ln \alpha = 2 - \alpha \iff \ln \alpha = 2(2 - \alpha)$$

Partie B : étude de la fonction g

La fonction g est définie sur $]0 ; 1]$ par :

$$g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x.$$

On admet que la fonction g est dérivable sur $]0 ; 1]$ et on note g' sa fonction dérivée.

1. Calculer $g'(x)$ pour $x \in]0 ; 1]$ puis vérifier que $g'(x) = xf\left(\frac{1}{x}\right)$.

Solution :

g est une somme de produits de fonctions dérivable sur $]0 ; 1]$, elle est donc dérivable sur cet intervalle et

$$g'(x) = -2 \times \frac{7}{8}x + 1 - \frac{1}{4} \left(2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} \right) = -\frac{7}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x - x \frac{1}{4} = -\frac{8}{4}x + 1 - \frac{1}{2}x \ln x = 1 - 2x - \frac{x \ln x}{2}.$$

Puisque $x \neq 0$, on peut factoriser x et $g'(x) = x \left(\frac{1}{x} - 2 - \ln x \frac{1}{2} \right)$.

Posons $X = \frac{1}{x} \iff x = \frac{1}{X}$; en remarquant que $X = \frac{1}{x} \Rightarrow \ln X = \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$, on peut écrire :

$g'(x) = \frac{1}{X} \left(X - 2 + \frac{1}{2} \ln X \right)$, soit $g'(x) = x f\left(\frac{1}{x}\right)$

2. (a) Justifier que pour x appartenant à l'intervalle $\left] 0 ; \frac{1}{\alpha} \right[$, on a $f\left(\frac{1}{x}\right) > 0$.

Solution :

On a vu dans la partie A que $0 < x < \alpha \Rightarrow f(x) < 0$, soit en prenant les inverses de ces nombres positifs :

$$\frac{1}{\alpha} < \frac{1}{x} \Rightarrow f\left(\frac{1}{x}\right) > 0.$$

- (b) On admet le tableau de signes suivant :

x	0	$\frac{1}{\alpha}$	1
signe de $f\left(\frac{1}{x}\right)$		+	0
		-	

En déduire le tableau de variations de g sur l'intervalle $]0 ; 1]$. Les images et les limites ne sont pas demandées.

Solution :

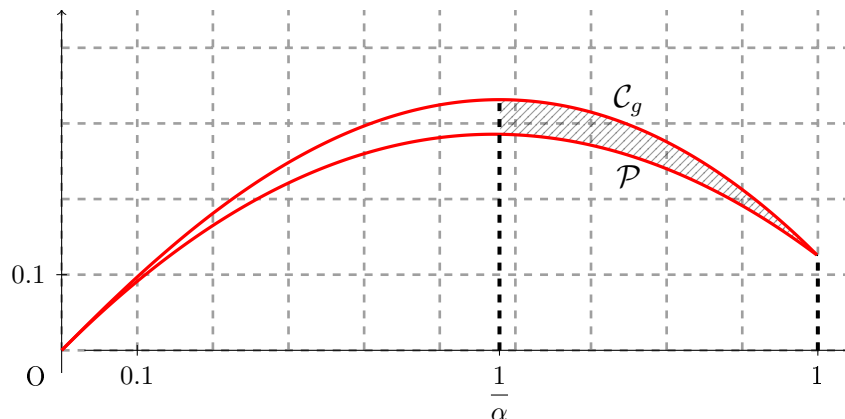
D'après le tableau de signes admis comme $0 < x \leq 1$ on en déduit par produit que :

- $g'(x) > 0$ sur $\left] 0 ; \frac{1}{\alpha} \right[$; g est croissante sur cet intervalle
- $g'(x) < 0$ sur $\left] \frac{1}{\alpha} ; 1 \right[$; g est décroissante sur cet intervalle
- $g'\left(\frac{1}{\alpha}\right) = 0$; $g\left(\frac{1}{\alpha}\right)$ est un maximum de g sur l'intervalle $[0 ; 1]$.

Partie C : un calcul d'aire.

On a représenté sur le graphique ci-dessous :

- La courbe $\mathcal{C}_g$ de la fonction g ;
- La parabole $\mathcal{P}$ d'équation $y = -\frac{7}{8}x^2 + x$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.



On souhaite calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine hachuré compris entre les courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$, et les droites d'équations $x = \frac{1}{\alpha}$ et $x = 1$.

On rappelle que $\ln(\alpha) = 2(2 - \alpha)$.

- (a) Justifier la position relative des courbes $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{P}$ sur l'intervalle $]0 ; 1]$.

**Solution :**

On sait que sur l'intervalle $]0 ; 1]$, $\ln x \leq 0$ et comme $x^2 \geq 0$, on conclut que $-\frac{1}{4}x^2 \ln x \geq 0$.

Conclusion : sur l'intervalle $]0 ; 1]$, $-\frac{7}{8}x^2 + x \leq -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x$ ce qui signifie géométriquement que sur cet intervalle l'arc de la parabole est en dessous de la représentation graphique de g .

- (b) Démontrer l'égalité :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

**Solution :**

Ne connaissant pas de primitive évidente de la fonction $x \mapsto x^2 \ln x$, on effectue une intégration par parties en posant

$$\begin{aligned} u(x) &= \ln x & u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v'(x) &= x^2 & v(x) &= \frac{x^3}{3} \end{aligned} \quad \text{d'où} \quad \begin{aligned} u'(x) &= \frac{1}{x} \\ v(x) &= \frac{x^3}{3} \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont dérivables sur l'intervalle $\left[\frac{1}{\alpha} ; 1\right]$ et leurs dérivées sont continues sur ce même intervalle,

$$\begin{aligned}
 \text{donc } \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx &= \left[\frac{x^3}{3} \ln x \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \frac{x^2}{3} \, dx = \left[\frac{x^3}{3} \ln x - \frac{x^3}{9} \right]_{\frac{1}{\alpha}}^1 = \\
 &= -\frac{1}{9} - \left(\frac{1}{3\alpha^3} \ln \frac{1}{\alpha} - \frac{1}{9\alpha^3} \right) = -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-\ln \alpha - \frac{1}{3} \right), \\
 \text{soit en remplaçant } \ln \alpha \text{ par } 2(2 - \alpha), \\
 \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 x^2 \ln x \, dx &= -\frac{1}{9} - \frac{1}{3\alpha^3} \left(-4 + 2\alpha - \frac{1}{3} \right) = -\frac{1}{9} + \frac{4}{3\alpha^3} - \frac{2}{3\alpha^2} + \frac{1}{9\alpha^3} = \\
 &= \frac{-\alpha^3 + 12 - 6\alpha + 1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}.
 \end{aligned}$$

2. En déduire l'expression en fonction de α de l'aire $\mathcal{A}$.



Solution :

L'aire de la partie hachurée est égale la différence des intégrales :

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2 \ln x \right) dx - \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{7}{8}x^2 + x \right) dx, \text{ soit par linéarité de l'intégrale :}$$

$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 \left(-\frac{1}{4}x^2 \ln x \right) dx = -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^1 (x^2 \ln x) \, dx,$$

soit d'après le calcul précédent :

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3} = \frac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3} \approx 0,07.$$