

## Fiche 12

## Calcul intégrale

Exercice 1 : Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

1.  $I_1 = \int_1^2 (x^2 + 3) \, dx$

2.  $I_2 = \int_{-1}^1 (x^3 - 2x) \, dx$

3.  $I_3 = \int_1^3 \frac{2}{x^2} \, dx$

4.  $I_4 = \int_1^e \left(1 + x + \frac{1}{x}\right) \, dx$

Exercice 2 : Déterminer la valeur des intégrales suivantes :

1.  $I_1 = \int_{-2}^0 \frac{5}{x+3} \, dx$

2.  $I_2 = \int_{-1}^1 5e^{x+1} \, dx$

3.  $I_3 = \int_0^2 \frac{5}{(2x+1)^2} \, dx$

4.  $I_4 = \int_0^1 4xe^{x^2} \, dx$

Exercice 3 : On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

1. Montrer que la fonction  $F(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$  est une primitive de  $f$ .

2. En déduire la valeur de :

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)e^{-x} \, dx$$

Exercice 4 : On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$$

1. Montrer que la fonction  $F(x) = (x^2 + 2x + 1)e^{-x}$  est une primitive de  $f$ .

2. En déduire la valeur de :

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)e^{-x} \, dx$$

Exercice 5: On considère la fonction  $f$  définie sur  $I = [0; +\infty[$  par :

$$f(x) = x \ln(x) - x + 2 \text{ si } x \neq 0 \text{ et } f(0) = 2$$

1. Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$  sur  $I$ .
2. Tracer la courbe représentative de  $f$ . ( unité : 1 cm pour les abscisses, 2 cm pour les ordonnées.)
3. On considère la fonction  $g$  définie sur  $]0; +\infty[$  par :

$$g(x) = x^2 (2 \ln(x) - 1)$$

- (a) Déterminer la fonction dérivée de  $g$ .
- (b) En déduire une primitive de la fonction  $f$ .
4. En déduire la valeur de :

$$\int_1^2 (x \ln(x) - x + 2) \, dx$$

5. En déduire la valeur en  $\text{cm}^2$  de l'aire sous la courbe entre  $x = 1$  et  $x = 2$ .

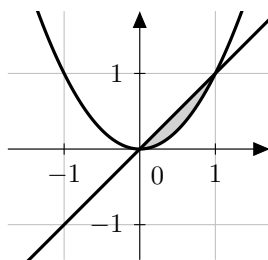
Exercice 6: Calculer la valeur moyenne des fonctions suivantes sur l'intervalle  $I$  donné.

1.  $f : x \mapsto x(3x^2 - 1)^2$ , avec  $I = [-1; 2]$ .
2.  $f : x \mapsto -3xe^{x^2-2}$ , avec  $I = [-1; 3]$ .
3.  $f : x \mapsto \frac{x^2}{(8 - x^3)^2}$ , avec  $I = [0; 1]$ .
4.  $f : x \mapsto \frac{3x^3}{5\sqrt{x^4 + 2}}$ , avec  $I = [1; 4]$ .

Exercice 7: A l'aide d'intégration par parties, déterminer les intégrales suivantes :

- |                                                                                                                                                                                                                     |                                                                                                                                                                                                                                               |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ol style="list-style-type: none"> <li>1. <math>I_1 = \int_1^2 3xe^{2x} \, dx</math></li> <li>2. <math>I_2 = \int_1^e 5x \ln(x) \, dx</math></li> <li>3. <math>I_3 = \int_e^{2e} x^2 \ln(x) \, dx</math></li> </ol> | <ol style="list-style-type: none"> <li>4. <math>I_4 = \int_{-1}^2 (x + 3)e^{3x} \, dx</math></li> <li>5. <math>I_5 = \int_0^1 \frac{x}{(x + 1)^2} \, dx</math></li> <li>6. <math>I_6 = \int_0^2 \frac{3x}{(2x + 3)^3} \, dx</math></li> </ol> |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

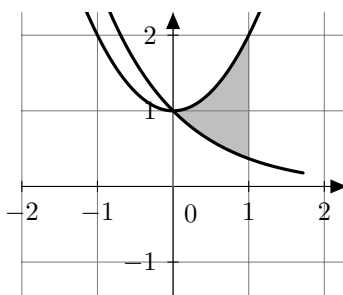
Exercice 8 : On considère le domaine  $\mathcal{D}$  ci-dessous, délimité par la parabole et la droite  $y = x$  entre 0 et 1 :



1. On suppose que la parabole est la courbe représentative de la fonction  $x \mapsto x^2$ . Déterminer la valeur en unité d'aire du domaine  $\mathcal{D}$ .
2. On suppose que l'unité est de 1 cm pour les abscisses et pour les ordonnées. Déterminer la valeur de l'aire en  $\text{cm}^2$ .

Exercice 9 : On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

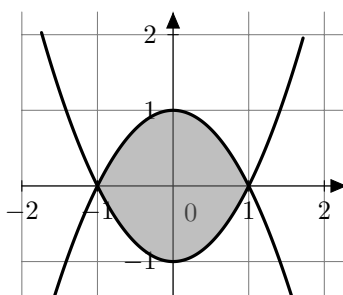
$$f(x) = e^{-x} \text{ et } g(x) = x^2 + 1$$



Déterminer l'aire en unité d'aire du domaine grisé.

Exercice 10 : On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = -x^2 + 1 \text{ et } g(x) = x^2 - 1$$



Déterminer l'aire en unité d'aire du domaine grisé.

Exercice 11 : On considère la suite  $(I_n)$  définie pour tout entier naturel  $n$  non nul, par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{1-x} dx.$$

1. A l'aide d'une intégration par parties, démontrer que

$$I_1 = e - 2$$

2. Démontrer, à l'aide d'une intégration, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+1} = (n+1)I_n - 1.$$

Utiliser cette formule pour calculer  $I_2$ .

3. (a) Justifier que, pour tout nombre réel  $x$  de l'intervalle  $[0; 1]$  et pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on a :  $0 \leq x^n e^{1-x} \leq x^n e$ .  
 (b) Justifier que :  $\int_0^1 x^n e dx = \frac{e}{n+1}$ .  
 (c) En déduire que, pour tout entier naturel  $n$  supérieur ou égal à 1, on a :  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ .  
 (d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$ .

Exercice 12 : Pour tout entier naturel  $n$ , on considère les intégrales suivantes :

$$I_n = \int_0^\pi e^{-nx} \sin(x) dx, \quad J_n = \int_0^\pi e^{-nx} \cos(x) dx.$$

1. Calculer  $I_0$ .  
 2. (a) Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $I_n \geq 0$ .  
 (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $I_{n+1} - I_n \leq 0$ .  
 (c) Déduire des deux questions précédentes que la suite  $(I_n)$  converge.  
 3. (a) Montrer que, pour tout entier naturel  $n$ , on a :

$$I_n \leq \int_0^\pi e^{-nx} dx.$$

- (b) Montrer que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a :

$$\int_0^\pi e^{-nx} dx = \frac{1 - e^{-n\pi}}{n}.$$

- (c) Déduire des deux questions précédentes la limite de la suite  $(I_n)$ .  
 4. (a) En intégrant par parties l'intégrale  $I_n$  de deux façons différentes, établir les deux relations suivantes, pour tout entier naturel  $n \geq 1$  :

$$I_n = 1 + e^{-n\pi} - nJ_n \quad \text{et} \quad I_n = \frac{1}{n}J_n$$

- (b) En déduire que, pour tout entier naturel  $n \geq 1$ , on a

$$I_n = \frac{1 + e^{-n\pi}}{n^2 + 1}$$