

Fiche 11 bis

Équation différentielle

Exercice 1 : (Extrait bac Amérique du sud novembre 2024)

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .
2. On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .
4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. (a) Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

- (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.
 - (a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[14 ; 15]$.

(b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

(c) Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

Fiche 11 bis
 Correction

Exercice 1 : (Extrait bac Amérique du sud novembre 2024)

PARTIE A

On considère l'équation différentielle

$$(E) : \quad y' + \frac{1}{4}y = 20e^{-\frac{1}{4}x},$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

1. Déterminer la valeur du réel a tel que la fonction g définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par $g(x) = axe^{-\frac{1}{4}x}$ soit une solution particulière de l'équation différentielle (E) .

Solution :

On cherche a tel que

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x}$$

Avec $g'(x) = a \times e^{-\frac{1}{4}x} + ax \times (-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{4}x}) = a \left(1 - \frac{1}{4}x\right) e^{-\frac{1}{4}x}$

Ce qui donne :

$$g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} \Leftrightarrow a \left(1 - \frac{1}{4}x\right) e^{-\frac{1}{4}x} + \frac{1}{4}axe^{-\frac{1}{4}x} = 20e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$\Leftrightarrow ae^{-\frac{1}{4}x} = 20e^{-\frac{1}{4}x}$$

$$\Leftrightarrow a = 20$$

Donc la fonction cherchée est $g(x) = 20xe^{-\frac{1}{4}x}$

2. On considère l'équation différentielle

$$(E') : \quad y' + \frac{1}{4}y = 0,$$

d'inconnue y , fonction définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E') .

Solution :

On a $y' + \frac{1}{4}y = 0 \Leftrightarrow y' = -\frac{1}{4}y$.

D'après le cours, les solutions de l'équation (E') sont les fonctions :

$$y(x) = Ce^{-\frac{1}{4}x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

3. En déduire les solutions de l'équation différentielle (E) .

Solution :

On cherche y telle que $y'(x) + \frac{1}{4}y(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x}$,

sachant que l'on a $g'(x) + \frac{1}{4}g(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x}$, donc en faisant la différence des deux lignes, on obtient :

$$(y - g)' + \frac{1}{4}(y - g) = 0$$

Donc $y - g$ est solution de l'équation (E') , soit :

$$y = Ce^{-\frac{1}{4}x} + 20xe^{-\frac{1}{4}x}, C \in \mathbb{R}$$

4. Déterminer la solution f de l'équation différentielle (E) telle que $f(0) = 8$.

Solution :

On sait que f est solution de l'équation différentielle (E) , donc on cherche C tel que :

$$Ce^{-\frac{1}{4} \times 0} + 20 \times 0 \times e^{-\frac{1}{4} \times 0} = 8 \Leftrightarrow C = 8$$

Donc la fonction f est définie par :

$$f(x) = 8e^{-\frac{1}{4}x} + 20xe^{-\frac{1}{4}x} = 4(2 + 5x)e^{-\frac{1}{4}x}$$

PARTIE B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = (20x + 8)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$. De plus, on admet que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

1. (a) Justifier que, pour tout réel x positif,

$$f'(x) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

Solution :

La fonction f est la fonction trouvée à la fin de la partie A : elle est donc dérivable et vérifie l'équation (E) , soit

$$f'(x) + \frac{1}{4}f(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} \text{ donc}$$

$$f'(x) = 20e^{-\frac{1}{4}x} - \frac{1}{4} \times 4(5x + 2)e^{-\frac{1}{4}x} = e^{-\frac{1}{4}x}(20 - 5x - 2) = (18 - 5x)e^{-\frac{1}{4}x}.$$

- (b) En déduire le tableau de variations de la fonction f . On précisera la valeur exacte du maximum de la fonction f sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.

Solution :

x	0	$\frac{18}{5}$	$+\infty$
$e^{-\frac{1}{4}x}$	+		+
$18 - 5x$	+	0	-
$f'(x)$	+	0	-
f	8	$f\left(\frac{18}{5}\right)$	0

Avec $f\left(\frac{18}{5}\right) = 80e^{-\frac{9}{10}}$.

2. Dans cette question on s'intéresse à l'équation $f(x) = 8$.

- (a) Justifier que l'équation $f(x) = 8$ admet une unique solution, notée α , dans l'intervalle $[14; 15]$.

Solution :

On a $f(14) = 288e^{-3,5} \approx 8,7$ et $f(15) = 300e^{-3,75} \approx 7,2$.

Sur l'intervalle $[14; 15]$, la fonction f est continue car dérivable sur $[0; +\infty[$, donc sur $[14; 15]$ et elle est strictement décroissante sur $[14; 15]$; comme $8 \in [f(15); f(14)]$, il existe d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires un réel unique α telle que $f(\alpha) = 8$.

- (b) Recopier et compléter le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` ci-contre, écrite en langage Python

a	14				
b	15				
$b - a$	1				
m	14,5				
Condition $f(m) > 8$	FAUX				

```
from math import exp
def f(x) :
    return (20*x+8)*exp(-1/4*x)

def solution_equation() :
    a,b = 14,15
    while b-a > 0.1 :
        m = (a+b)/2
        if f(m) > 8 :
            a = m
        else :
            b = m
    return a,b
```

Solution :

On complète le tableau ci-dessous en faisant tourner étape par étape la fonction `solution_equation` écrite en langage Python

	a	14	14	14,25	14,375	14,4375
	b	15	14,5	14,5	14,5	14,5
	$b - a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
	m	14,5	14,25	14,375	14,4375	
	Condition $f(m) > 8$	FAUX	VRAI	VRAI	VRAI	

(c) Quel est l'objectif de la fonction `solution_equation` dans le contexte de la question ?

 **Solution :**
L'objectif de la fonction `solution_equation` est de déterminer, par dichotomie, un encadrement d'amplitude 0,1 de la solution de l'équation $f(x) = 8$ dans l'intervalle $[14 ; 15]$.