

Fiche 11

Primitives et équations différentielles

Exercice 1: Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = 3x^2 - 2x + 1$

2. $f_2(x) = 7x^3 - 4x + 5$

3. $f_3(x) = 4x - \frac{2}{x} + \frac{4}{3}$

4. $f_4(x) = 5e^x + \frac{4}{x^2}$

5. $f_5(x) = 3x^7 - \frac{5}{x}$

6. $f_6(x) = 2e^x - \frac{3}{\sqrt{x}}$

Exercice 2: Déterminer les primitives des fonctions suivantes :

1. $f_1(x) = \frac{2}{5x+3}$

2. $f_2(x) = 7e^{-5x+1}$

3. $f_3(x) = \frac{2}{(x+3)^2} + \frac{4}{x+3}$

4. $f_4(x) = 5e^{3x+5} + \frac{4}{2x+3}$

5. $f_5(x) = 3xe^{x^2}$

6. $f_6(x) = \frac{5e^{3x}}{2e^{3x}+1}$

Exercice 3: On considère la fonction f définie sur $]0; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln(x)}{x^2}$$

1. En utilisant un logiciel de calcul formel, on peut lire :

```
(%i1) integrate(ln(x)/x^2, x);
```

```
(%o1) -1/x - ln(x)/x
```

Justifier le résultat.

2. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(1) = 3$.

Exercice 4: On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{x+3}$$

1. Déterminer la dérivée de la fonction f .

2. En déduire une primitive de la fonction f .

3. Déterminer la primitive F de f vérifiant $F(-3) = 1$.

Exercice 5 : On considère la fonction g définie sur $] -\infty; -3[$ par : $g(x) = \frac{2x+3}{(x+3)^3}$.

1. Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que : pour tout $x < -3$,

$$g(x) = \frac{a}{(x+3)^2} + \frac{b}{(x+3)^3}$$

2. Montrer que la fonction H définie sur $] -\infty; -3[$ par :

$$H(x) = \frac{-2}{x+3} + \frac{3}{2(x+3)^2}$$

est une primitive de g sur $] -\infty; -3[$.

3. En déduire la primitive de g sur $] -\infty; -3[$ qui s'annule en -4 .

Exercice 6 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = xe^{2x+1}$$

1. Déterminer les réels a et b tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = (ax+b)e^{2x+1}$ soit une primitive de f :
2. Déterminer la primitive H de f vérifiant s'annulant en 1.

Exercice 7 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $y' = 5x^2 + \frac{5}{x} + 5$ sur $I =]0; +\infty[$.	(c) $y' = 3e^{2x+1}$ sur $I = \mathbb{R}$.
(b) $xy' - 3x + 1 = 0$ sur $I =]0; +\infty[$.	(d) $y'' = 5$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 8 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $2y' - 3y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.	(c) $\frac{1}{2}y' + y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.
(b) $5y' = 2y$ sur $I = \mathbb{R}$.	(d) $-7y' + \frac{3}{4}y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 9 : Résoudre les équations différentielles suivantes :

(a) $2y' - 3y = 5$ sur $I = \mathbb{R}$.	(c) $\frac{1}{2}y' + y = 7$ sur $I = \mathbb{R}$.
(b) $5y' = 2y + 3$ sur $I = \mathbb{R}$.	(d) $-7y' + \frac{3}{4}y - 14 = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 10 : Résoudre les équations différentielles sur $I = \mathbb{R}$ satisfaisant la condition donnée :

(-1-) $(E_1) \quad 3y' + 5y = 0$ avec $f_1(0) = 5$.

(-2-) $(E_2) \quad y' = y - 4$ sachant que la courbe passe par le point $(0, 3)$.

(-3-) $(E_3) \quad -y' - 4y - 1 = 0$ avec $f'(3) = 0$.

(-4-) $(E_4) \quad 3y' + 2y - 3 = 0$ sachant que la tangente à la courbe au point d'abscisse 1 a pour coefficient directeur -2 .

Exercice 11 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y' - 2y = -2x^2 + 1$$

1. Résoudre l'équation homogène :

$$(E_H) \quad y' - 2y = 0$$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = x^2 + x$ est une solution particulière de (E) .

3. En déduire l'ensemble solution de (E) .

Exercice 12 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad 2y' - y = x + e^x$$

1. Résoudre l'équation homogène : $(E_H) \quad 2y' - y = 0$

2. Montrer que la fonction f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $f_0(x) = e^x - x - 2$ est une solution particulière de (E) .

3. En déduire l'ensemble solution de (E) .

4. Déterminer la solution g de E vérifiant la condition initiale $g(0) = 1$.

Exercice 13 : On considère l'équation (E) suivante :

$$(E) \quad y' + 2y = 3te^t$$

1. En utilisant le logiciel Xcas, on obtient la capture d'écran suivante :

```
2 f(x) := (x-1/3)*exp(x)
```

```
// Interprète f
```

```
// Succès
```

```
// lors de la compilation f
```

$$x \rightarrow (x - \frac{1}{3}) * \exp(x)$$

```
3 factoriser(f'(x))
```

$$\frac{(3*x+2)*\exp(x)}{3}$$

```
4 simplifier(f'(x) + 2*f(x))
```

$$3*x*\exp(x)$$

Justifier les lignes 3 et 4.

2. Résoudre l'équation homogène $:(E_H) \quad y' + 2y = 0$
3. En déduire l'ensemble solution de (E) .
4. Déterminer la solution g de E pour que la courbe de la fonction passe par le point de coordonnées $(0, 2)$.

Exercice 14 :

On considère l'équation différentielle suivante :

$$(E) \quad y' = -2y + \frac{2}{3}y^2$$

1. On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{3}{1 + 5e^{2x}}$$

Montrer que f est une solution de l'équation (E) .

2. Résoudre l'équation différentielle (E') :

$$(E') \quad 3y' = 3y - 2$$

3. On désigne par g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ qui ne s'annule pas.
On note h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$h(x) = \frac{1}{g(x)}$$

- (a) Montrer que si h est solution de l'équation différentielle (E') , alors g est solution de l'équation différentielle (E) .
- (b) Pour tout réel positif m , on considère les fonctions g_m définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$g_m = \frac{3}{1 + me^{2x}}$$

Montrer que pour tout réel positif m , la fonction g_m est solution de l'équation différentielle (E) .