Fiche 10 bis

Loi binomiale

Exercice 1 : *(Extrait bac Amérique du sud septembre 2023)*

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

   (a) Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

   (b) Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.

   (a) Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

   (b) Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

   Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à $0,49$ et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à $0,51$.

   Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

   On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

   - M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
   - F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
   - F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

4. Représentation de l'arbre pondéré et calcul des probabilités.

   (a) Représenter l'arbre pondéré associé à la situation.

   (b) Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,31507.

   (c) Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Fiche 9 bis

Correction

Exercice 1 : *(Extrait bac Amérique du sud septembre 2023)*

1. Entre 1998 et 2020, en France 18 221 965 accouchements ont été recensés, parmi lesquels 293 898 ont donné naissance à des jumeaux et 4 921 ont donné naissance à au moins trois enfants.

   (a) Avec une précision de 0,1 %, calculer parmi tous les accouchements recensés, le pourcentage d'accouchements donnant naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

   Solution :

   Il s'agit d'une fréquence dont le calcul est donné par le rapport entre l'effectif et l'effectif total. On a donc :

   $$\frac{293898}{18221965} \approx 1,6\,\%$$

   Donc $1,6\,\%$ des accouchements donnent naissance à des jumeaux sur la période 1998-2020.

   (b) Vérifier que le pourcentage d'accouchements qui ont donné naissance à au moins trois enfants est inférieur à 0,1 %.

   Solution :

   De même

   $$\frac{4921}{18221965} \approx 0,027\,\%$$

   Ainsi, $0,027\,\% < 0,1\,\%$, donc le pourcentage est bien inférieur à $0,1\,\%$.

2. On admet qu'un jour donné dans une maternité, on réalise n accouchements.

   (a) Dans le cas où $n = 20$, préciser la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X et calculer la probabilité qu'on réalise exactement un accouchement double.

   Solution :

   La variable X compte le nombre de succès dans le schéma de Bernoulli où le succès correspond à un accouchement double. Donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale :

   $$X \sim \mathcal{B}(20, 0.016)$$

   La probabilité de réaliser exactement un accouchement double est :

   $$P(X = 1) = \binom{20}{1}(0.016)^1(0.984)^{19}$$

   $$P(X = 1) \approx 20 \times 0.016 \times 0.716 \approx 0.229$$

(b) Par la méthode de votre choix que vous expliciterez, déterminer la plus petite valeur de n telle que $P(X \geqslant 1) \geqslant 0,99$.

Solution :

Nous utilisons la complémentaire :

$$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0)$$

$$P(X = 0) = (0.984)^n$$

On cherche n tel que :

$$1 - (0.984)^n \geq 0.99$$

$$(0.984)^n \leq 0.01$$

En résolvant $n \geq \frac{\ln(0.01)}{\ln(0.984)}$, on trouve $n \geq 285,5$.

Interprétation : À partir de 286 accouchements, il y a au moins 99 % de chances d'avoir au moins un accouchement double.

3. Dans cette maternité, parmi les naissances double, on estime qu'il y a 30 % de jumeaux monozygotes (appelés « vrais jumeaux » qui sont obligatoirement de même sexe : deux garçons ou deux filles) et donc 70 % de jumeaux dizygotes (appelés « faux jumeaux », qui peuvent être de sexes différents : deux garçons, deux filles ou un garçon et une fille).

   Dans le cas de naissances doubles, on admet que, comme pour les naissances ordinaires, la probabilité d'être une fille à la naissance est égale à $0,49$ et que celle d'être un garçon à la naissance est égale à $0,51$.

   Dans le cas d'une naissance double de jumeaux dizygotes, on admet aussi que le sexe du second nouveau-né des jumeaux est indépendant du sexe du premier nouveau-né.

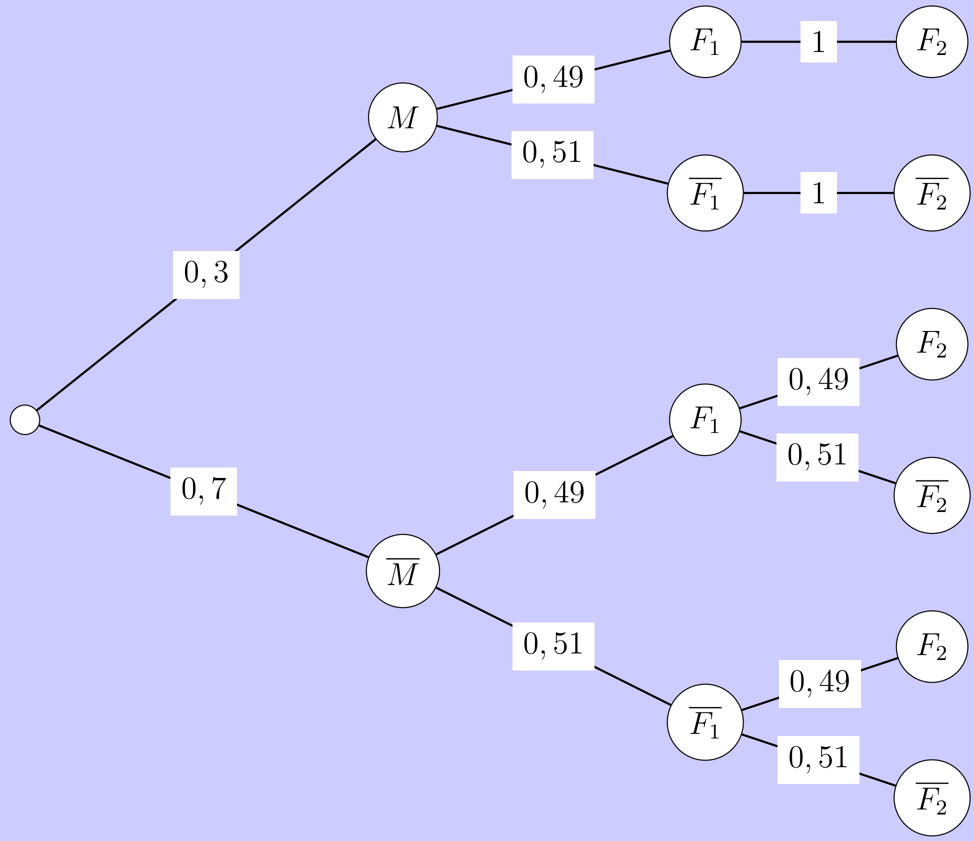
   On choisit au hasard un accouchement double réalisé dans cette maternité et on considère les évènements suivants :

   - M : « les jumeaux sont monozygotes » ;
   - F_1 : « le premier nouveau-né est une fille » ;
   - F_2 : « le second nouveau-né est une fille ».

4. Représentation de l'arbre pondéré et calcul des probabilités.

   (a) Représenter l'arbre pondéré associé à la situation.

Solution :



(b) Montrer que la probabilité que les deux nouveaux-nés soient des filles est 0,31507.

Solution :

On cherche la probabilité de $F_1 \cap F_2$. Donc, en utilisant l'arbre, on obtient :

$$P(F_1 \cap F_2) = P(M) \times 0.49 + P(\overline{M}) \times (0.49 \times 0.49)$$

$$= 0.3 \times 0.49 + 0.7 \times (0.49 \times 0.49)$$

$$= 0.147 + 0.7 \times 0.2401 = 0.147 + 0.16807 = 0.31507$$

(c) Les deux nouveaux-nés sont des jumelles. Calculer la probabilité qu'elles soient monozygotes.

Solution :

On cherche ici $P_{F_1 \cap F_2}(M)$. En utilisant la formule de probabilité conditionnelle :

$$P_{F_1 \cap F_2}(M) = \frac{P(M \cap F_1 \cap F_2)}{P(F_1 \cap F_2)}$$

$$= \frac{0.147}{0.31507} \approx 0.4664$$

Ainsi, la probabilité que les jumelles soient monozygotes est environ 46,64 %.