

Fiche 10

Loi binomiale

Exercice 1 : On lance un dé à six faces 3 fois de suite.

On appelle X la variable aléatoire associant le nombre de fois où 6 est apparu.

On note A l'évènement "le 6 apparaît".

1. Faire un arbre pondéré décrivant l'expérience.
2. Déterminer la probabilité de faire 3 fois de suite le 6.
3. Déterminer la probabilité de faire au moins un 6.

Exercice 2 : Une urne contient 20 boules dont 12 sont rouges. On tire successivement et avec remise 6 boules. On note X la variable aléatoire associant le nombre de boules rouges obtenues à la fin de l'expérience.

Déterminer les probabilités des événements suivants :

1. $A =$ " tirer exactement 3 boules rouges".
2. $B =$ " tirer exactement 6 boules rouges".
3. $C =$ " tirer exactement 1 boules rouges".
4. $D =$ " tirer au moins 4 boules rouges".
5. $E =$ " tirer au plus 2 boules rouges".
6. $F =$ " tirer au moins une boule rouge".

Exercice 3 : Un archer sait qu'il a une probabilité de $\frac{4}{5}$ d'atteindre la cible lorsqu'il tire une flèche. Il tire 8 flèches. Soit X la variable aléatoire désignant le nombre de flèches ayant atteint la cible.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Calculer la probabilité pour qu'il atteigne la cible exactement 2 fois.
3. Calculer la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible.
4. Calculer la probabilité qu'il atteigne entre 6 et 8 fois la cible.
5. Calculer la probabilité qu'il atteigne au minimum 4 fois la cible.
6. Déterminer $E(X)$ et l'interpréter.

Un autre archer ne connaît pas sa probabilité p d'atteindre la cible.

1. Pour une volée de 8 flèches. Quelle doit être la valeur de p pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible soit supérieur à 0,9.
2. Sachant que sa probabilité de réussite est de 0,1. Combien doit-il tirer de flèches pour que la probabilité d'atteindre au moins une fois la cible soit supérieur à 0,9.

Exercice 4: Un devoir est un QCM avec 4 réponses proposées, et une seule réponse vraie. Le devoir comporte 20 questions.
Un élève décide de répondre au hasard aux 20 questions.
On note X la variable aléatoire associant le nombre de bonnes réponses.

1. Déterminer la loi de probabilité de X .
2. Déterminer la probabilité d'avoir 10 bonnes réponses sur les 20.
3. Déterminer la probabilité d'avoir entre 15 et 20 bonnes réponses.
4. Déterminer la probabilité de n'avoir aucune bonne réponse.
5. Déterminer et interpréter l'espérance de X .

On suppose qu'une bonne réponse rapporte 3 points, et une mauvaise retire 1 point. Le devoir est donc sur 60 points, puis la note est donc le tiers des points obtenus.
On note Y la variable aléatoire associant la note de l'élève à la fin du devoir.

1. Déterminer une relation entre Y et X .
2. Déterminer la probabilité d'obtenir 0 (soit une note négative).
3. Déterminer la probabilité d'obtenir une note au-dessus de la moyenne.
4. Calculer l'espérance mathématique de Y . Conclure.

Exercice 5: Nous disposons d'un dé à 6 faces. On note A l'évènement "obtenir un six". Un jeu consiste à lancer 4 fois de suite le dé.
On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de 6 obtenu.

1. Déterminer $P(A)$.
2. Justifier que X suit la loi binomiale dont on donnera les paramètres.
3. Déterminer la probabilité d'obtenir exactement 2 fois un six.
4. Déterminer la probabilité d'obtenir au moins un six.

Pour pouvoir jouer, il faut miser 10 €. Les gains sont répartis de la façon suivante :

- Si le joueur fait 4 six, il gagne 1000 €.
- Si le joueur fait 3 six, il gagne 100 €.
- Si le joueur fait 2 six, il gagne 20 €.
- Sinon, il ne gagne rien.

On note Y la variable associant le gain algébrique du joueur.

5. Quelle est la probabilité de perdre 10 € ?
6. Déterminer dans un tableau la loi de probabilité de Y .
7. Calculer l'espérance mathématique $E(Y)$. Le jeu est-il équitable ?

Exercice 6 : (*Extrait bac Amérique du sud sept. 2023*)**Partie A**

Un jeu proposé dans une fête foraine consiste à effectuer trois tirs successivement sur une cible mouvante.

On a constaté que :

- Si le joueur atteint la cible lors d'un tir alors il ne l'atteint pas lors du tir suivant dans 65 % des cas ;
- Si le joueur n'atteint pas la cible lors d'un tir alors il l'atteint lors du tir suivant dans 50 % des cas.

La probabilité qu'un joueur atteigne la cible lors de son premier tir est de 0,6.

Pour tout évènement A , on note $p(A)$ sa probabilité et $\bar{A}$ l'évènement contraire de A .

On choisit au hasard un joueur à ce jeu de tirs.

On considère les évènements suivants :

- A_1 : « Le joueur atteint la cible lors du 1^{er} tir »
- A_2 : « Le joueur atteint la cible lors du 2^e tir »
- A_3 : « Le joueur atteint la cible lors du 3^e tir ».

1. Représenter l'arbre pondéré modélisant la situation.

Soit X la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur atteint sa cible au cours des trois tirs.

2. Montrer que la probabilité que le joueur atteigne exactement deux fois la cible au cours des trois tirs est égale à 0,4015.

3. L'objectif de cette question est de calculer l'espérance de la variable aléatoire X , notée $E(X)$.

(a) Déterminer le tableau donnant la loi de probabilité de la variable aléatoire X .

(b) Calculer $E(X)$.

(c) Interpréter le résultat précédent dans le contexte de l'exercice.

Partie B

On considère N , un entier naturel supérieur ou égal à 1.

Un groupe de N personnes se présente à ce stand pour jouer à ce jeu dans des conditions identiques et indépendantes.

Un joueur est déclaré gagnant lorsqu'il atteint trois fois la cible.

On note Y la variable aléatoire qui compte parmi les N personnes le nombre de joueurs déclarés gagnants.

1. Dans cette question, $N = 15$.

(a) Justifier que Y suit une loi binomiale dont on déterminera les paramètres.

(b) Donner la probabilité, arrondie à 10^{-3} , qu'exactly 5 joueurs soient gagnants à ce jeu.

2. Par la méthode de votre choix, que vous explicitez, déterminer le nombre minimum de personnes qui doivent se présenter à ce stand pour que la probabilité qu'il y ait au moins un joueur gagnant soit supérieure ou égale à 0,98.