Chapitre 2

Suites

Table des matières

1 Le raisonnement par récurrence.

Propriété 1 :

Raisonnement par récurrence :
On considère une proposition P_n dépendant d'un entier n et un entier n_0.

- **initialisation** : On vérifie que P_{n_0} est vraie.
- **hérédité** : On suppose que P_n est vraie pour un entier quelconque fixé $n \geq n_0$. (**hypothèse de récurrence**), on montre alors que P_{n+1} est vraie.

On conclut alors que P_n est vraie pour tout entier $n \geq n_0$.

Exemple 1 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3n \end{cases}$.
Le but est de montrer que la suite est positive : $\forall n \geq 0$, $u_n \geq 0$.
Pour ceci, il est nécessaire de définir la propriété à prouver : Notons, pour $n \geq 0$:

$$P_n = \text{ « } u_n \geq 0 \text{ »}$$

- **initialisation** : Pour $n = 0$, on a $u_0 = 3$, donc on a bien $u_0 \geq 0$, donc la proposition P_0 est vraie.
- **hérédité** :
  - **hypothèse de récurrence** : Supposons que pour un entier n fixée (avec $n > 0$), la proposition P_n soit vraie, c'est à dire que $u_n \geq 0$.
  - On va montrer que la proposition P_{n+1} est vraie :
    On a $u_{n+1} = 2u_n + 3n$, avec par hypothèse $u_n \geq 0$, et $n > 0$, donc par somme de termes positifs, on a bien $u_{n+1} \geq 0$. La proposition P_{n+1} est donc bien vraie.

On peut donc conclure, par le raisonnement par récurrence, que la proposition P_n est vraie pour tout entier $n \geq 0$.

Remarque : une propriété peut être héréditaire, sans être vraie, si l'initialisation n'est pas vérifiée ! Il ne faut donc jamais oublier d'initialiser le raisonnement.

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = 2u_n + 1 \end{cases}$.
Montrer que, pour tout $n \geq 2$, $u_n > 10$.

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = -5 \\ u_{n+1} = u_n + 6 \end{cases}$.
Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n = 6n - 5$.

2 Comportement global d'une suite

2.1 Variation

Définition 1 :

- Une suite (u_n) est dite croissante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est dite décroissante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.
- Une suite (u_n) est dite constante si pour tout entier n, on a $u_{n+1} = u_n$.

Exercice 3 : Montrer par récurrence que la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier n, $u_{n+1} = e^{u_n}$ est croissante.

2.2 Majorée, minorée :

Définition 2 :

- On dit que la suite (u_n) est majorée, s'il existe un nombre M tel que pour tout n, $u_n \leq M$.
- On dit que la suite (u_n) est minorée, s'il existe un nombre m tel que pour tout n, $m \leq u_n$.
- On dit que la suite (u_n) est bornée, si elle est à la fois minorée et majorée.

Exemple 2 :

On considère la suite définie pour tout n par $u_n = 5e^{-2n+1}$, on montre que la suite est bornée :

- La suite est majorée par $u_0 = 5e$, car la suite est décroissante.
- La suite est minorée par 0, car la fonction exponentielle est toujours positive.

Donc la suite est bien majorée et minorée, elle est donc bornée.

Exercice 4 :

- Montrer par récurrence que la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$ est minorée par 2.
- Montrer par récurrence que la suite définie par $u_0 = 2$ et, pour tout n, $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 6$ est majorée par 12.

3 Limites

3.1 Limite finie

Définition 3 :

On dit que la suite (u_n) admet une limite réelle ℓ, si tout intervalle $]a;b[$ contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.
On dit alors que la suite (u_n) est convergente.
Cela s'écrit alors :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = \ell$$

Remarque : Tout intervalle $]a;b[$ contenant ℓ contient un intervalle de la forme $]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ où ϵ est un réel strictement positif. La définition est donc équivalente à la définition suivante :

Définition 4 :

On dit que la suite (u_n) admet une limite réelle ℓ, si tout $\epsilon > 0$, l'intervalle $]\ell - \epsilon; \ell + \epsilon[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Exemple 3 :

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad u_n = \frac{2n+3}{n+1}$$

Montrons que (u_n) converge vers 2 :
Considérons un réel $\epsilon > 0$ quelconque, on va montrer qu'il existe un rang n_ϵ tel que, pour tout $n \geq n_\epsilon$, $u_n \in]2 - \epsilon; 2 + \epsilon[$:

- On a : $2 - \epsilon \leq \dfrac{2n+3}{n+1} \quad \Leftrightarrow \quad -\dfrac{\epsilon+1}{\epsilon} \leq n$
  Ce qui est toujours vrai, car $n \geq 0$.
- On a : $\dfrac{2n+3}{n+1} \leq 2 + \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{1-\epsilon}{\epsilon}$

En conclusion, en prenant $n_\epsilon = \lfloor \dfrac{1-\epsilon}{\epsilon} \rfloor$, on a bien, pour tout $n \geq n_\epsilon$, $u_n \in]2 - \epsilon; 2 + \epsilon[$.
Ce qui prouve bien que (u_n) converge vers 2.

Exercice 5 : On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = -3 + \dfrac{1}{n+2}$.
Montrer que la suite converge vers -3.

Définition 5 :

Une suite qui ne converge pas est dite divergente.

Exemple 4 :

La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = (-1)^n$ est divergente.

3.2 Limite infinie

Définition 6 :

On dit que la suite (u_n) admet comme limite $+\infty$ si tout intervalle $[A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$$

Exemple 5 :

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $u_n = 3n - 1$.

Soit $A > 0$, on a : $3n - 1 \geq A \quad \Leftrightarrow \quad n \geq \dfrac{A+1}{3}$

En prenant $n_A = \lfloor \dfrac{A+1}{3} \rfloor$, on a donc, pour tout $n \geq n_A$, $u_n \in [A;+\infty[$.

Remarque : Si la suite (u_n) admet comme limite $+\infty$, elle est donc divergente. On dira alors qu'elle diverge vers $+\infty$.

Définition 7 :

On dit que la suite (u_n) admet comme limite $-\infty$ si tout intervalle $]-\infty;A]$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang. On écrit alors :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -\infty$$

Exercice 6 : La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = -5n+3$ est divergente vers $-\infty$.

4 Limites usuelles

4.1 Limites finies

Propriété 2 :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$
- $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

4.2 Limites infinies

Propriété 3 :

- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$
- $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty$
- $\forall p \in \mathbb{N}^*,\ \displaystyle\lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty$

4.3 Suite géométrique

Propriété 4 :

Soit q un réel. On considère la suite $u_n = q^n$.

- Si $q \in]-1, 1[$, alors la suite (u_n) converge vers 0.
- Si $q > 1$, la suite diverge avec comme limite l'infini.
- Si $q \leq -1$, la suite diverge.

Exemple 6 :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\dfrac{3}{5}\right)^n = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} (8)^n = +\infty$

5 Opérations sur les limites

5.1 Somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F-I

5.2 Produit

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$
$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F-I

5.3 Quotient

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\ell \neq 0$	$\pm\infty$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$0^{\pm}$	$0^{\pm}$	0
$\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{u_n}{v_n}$	$\dfrac{\ell}{\ell'}$	0	$\pm\infty$	F-I	$\pm\infty$	$\pm\infty$	F-I

Exemple 7 :

Pour la suite définie pour tout n par $u_n = \dfrac{n\left(3n-2+\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{5}{n}}$.

On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 3n-2+\frac{1}{n} = +\infty$.
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2+\dfrac{1}{n} = 2$

En conclusion, par produit et quotient, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n\left(3n-2+\frac{1}{n}\right)}{2+\frac{5}{n}} = +\infty$

Exercice 7 : Déterminer la limite des suites suivantes :

- $u_n = (n+3)(2n^2+n-6)$
- $v_n = \dfrac{5-\frac{3}{n}}{n^2+2}$
- $w_n = \dfrac{3-\frac{2}{n^2}}{\frac{5}{n^3}-2}$

6 Propriétés

Propriété 5 :

Lorsqu'elle existe la limite d'une suite est unique.

Propriété 6 :

Une suite qui converge est bornée.

Propriété 7 :

Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$