Chapitre 9

Fonction logarithme népérien

Table des matières

1 Définition :

Définition 1 :

Pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}$, il existe une unique solution à l'équation $e^y = x$, de variable y, notée $\ln(x)$.
$\forall x \in \mathbb{R}^{+*} \quad , \quad \forall y \in \mathbb{R}$:

$$e^y = x \Leftrightarrow x = \ln(y)$$

On appelle fonction logarithme népérien notée ln la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ définie par :

$$\ln : x \mapsto \ln(x)$$

Exemple 1 :

- $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$
- $\ln(x) = 5 \Leftrightarrow x = e^5$

Propriété 1 :

- $\forall x \in]0;+\infty[$, $e^{\ln(x)} = x$.
- $\forall x \in \mathbb{R}$, $\ln(e^x) = x$.

Exemple 2 :

- $e^{\ln(7)} = 7$
- $\ln(e^{12}) = 12$

2 Propriétés algébriques :

Propriété 2 :

- $\ln(1) = 0$.
- $\ln(e) = 1$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall b \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln(a)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\ln(a^n) = n\ln(a)$.
- $\forall a \in \mathbb{R}^{+*}$, $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$.

Exemple 3 :

$\ln(15) = \ln(3 \times 5) = \ln(3) + \ln(5)$

Exercice 1 : Écrire les nombres suivants à l'aide de $\ln(2)$ et $\ln(3)$:

1. $A = \ln(12)$
2. $B = \ln(72)$
3. $C = \ln\left(\frac{1}{8}\right)$
4. $D = \ln\left(\frac{16}{81}\right)$

3 Limites

Propriété 3 :

- On a :

$$\lim_{x\to 0^+} \ln(x) = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \ln(x) = +\infty$$

- **Croissance comparée** : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\lim_{x\to 0^+} x^n \ln(x) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$$

Exercice 2 : Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to +\infty} 3x^2 - 5\ln(x) = 0$$

4 Dérivation

Propriété 4 :

- La fonction ln est continue et dérivable sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x \in]0;+\infty[$:

$$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

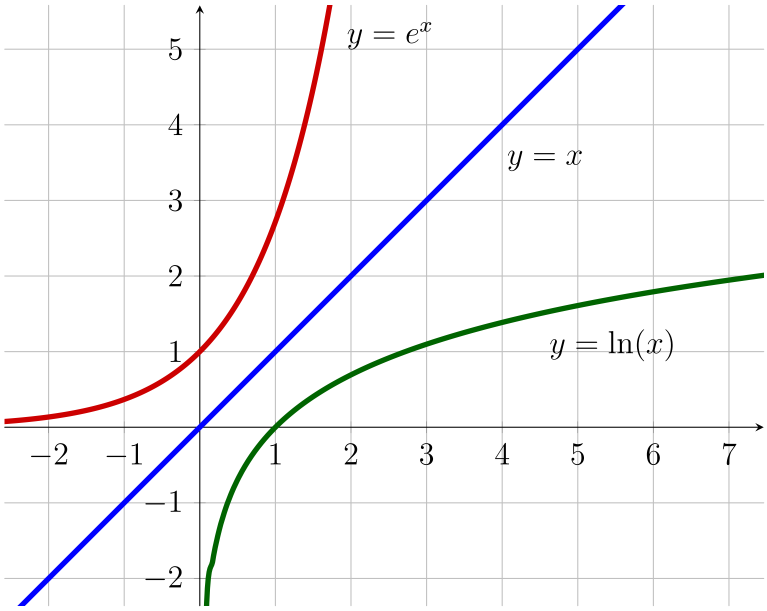
- Pour u une fonction dérivable sur I à valeur dans $\mathbb{R}^{+*}$, la fonction $\ln(u)$ dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$$

Exercice 3 : Déterminer la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 5\ln\left(3x^2 + 7\right)$$

5 Courbe :



Propriété 5 :

$$\ln(x) < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

$$\ln(x) > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

6 Équations et inéquations :

Propriété 6 :

$$\forall x > 0 \quad \forall a > 0 \quad \ln(x) = \ln(a) \Leftrightarrow x = a$$

Exemple 4 :
$\ln(x) = \ln(5) \Leftrightarrow x = 5$

Exercice 4 : Résoudre dans $\mathbb{R}^{+*}$:

1. $\ln(x) = \ln(2)$
2. $\ln(3x) = \ln(5)$
3. $\ln(2x) = 0$
4. $\ln(5x) < 1$

Exercice 5 : Résoudre dans $]3; +\infty[$:

$$\ln(2x - 6) = \ln(1 + 7x)$$

Exercice 6 : On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme 5 et de raison 3. Déterminer les valeurs de n tel que

$$u_n > 10000$$