

Chapitre 3

Suites -2-

Table des matières

1	Limites et comparaison	2
2	Limites et variation	3

1 Limites et comparaison

Propriété 1 :

- Lorsqu'elle existe la limite d'une suite est unique.

Propriété 2 :

- Une suite qui converge est bornée.

Propriété 3 :

Limite par comparaison :

- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
- Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_n \leq v_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$.

Exemple 1 :

On considère la suite définie par $u_0 = 0$ et, pour tout n , $v_{n+1} = 2v_n + 3$.

On peut montrer par récurrence que, pour tout entier n , on a $v_n \geq n$.

On pose alors, pour tout n , $u_n = n$. On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$:

On conclut donc, par comparaison, que $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$

Propriété 4 :

Théorème des gendarmes :

Si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $v_n \leq u_n \leq w_n$ et si $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell$.

Exercice 1 : On considère la suite (u_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n = 2 + \frac{5 \sin(n)}{n}$$

1. Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad 2 - \frac{5}{n} \leq u_n \leq 2 + \frac{5}{n}$$

2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

2 Limites et variation



Théorème 1 :



- Toute suite croissante et majorée converge.
- Toute suite décroissante et minorée converge.

Remarque :

ATTENTION : Ce théorème permet de prouver la convergence d'une suite mais ne donne pas la valeur de la limite.

Exercice 2 : On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n ,
 $u_{n+1} = \frac{9}{6-u_n}$.

1. Montrer que, pour tout entier naturel n , $0 < u_n < u_{n+1} < 3$.
2. Justifier que la suite (u_n) converge vers un réel l .
3. On admet que $l \neq 6$. Montrer que $l = \frac{9}{6-l}$ et déterminer la valeur de l .



Théorème 2 :



- Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
- Une suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.