Chapitre 11

Primitives et équations différentielles

Table des matières

Dans tout le chapitre, f désigne une fonction définie sur un intervalle I, et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1 Primitives

1.1 Définition

Définition 1 :

Soit f une fonction définie sur I. On appelle primitive de f toutes fonctions dont la dérivée est f :
F est une primitive de f sur l'intervalle I, si et seulement si F est dérivable sur I et pour tout $x \in I$:

$$F'(x) = f(x)$$

Exemple 1 :

Pour $f(x) = 6x^2 + 5x - 3$, la fonction définie par $F(x) = 2x^3 + \frac{5}{2}x^2 - 3x + 7$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$, car on a $F'(x) = f(x)$...

Propriété 1 :

Pour une fonction f continue sur I, il existe une infinité de primitives toutes égales à une constante additive près :
Si F et G sont deux primitives de f sur I, alors il existe un réel k tel que, pour tout x de I :

$$F(x) = G(x) + k$$

Exemple 2 :

Pour $f(x) = 6x^2+5x-3$, les fonctions $F(x) = 2x^3+\frac{5}{2}x^2-3x+7$, $G(x) = 2x^3+\frac{5}{2}x^2-3x-\frac{1}{5}$,.... sont des primitives de f sur $\mathbb{R}$

1.2 Primitives de fonctions usuelles

D_f	$f(x)$	$F(x)$
$\mathbb{R}$	$k \in \mathbb{R}$	kx
$\mathbb{R}$	x	$\frac{1}{2}x^2$
$\mathbb{R}$	x^2	$\frac{1}{3}x^3$
$\mathbb{R}$	x^n avec $n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$\mathbb{R}_+^*$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x)$
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
$]-\infty, 0[$ ou $]0, +\infty[$	$\frac{1}{x^n}$ avec $n \geq 2$	$-\frac{1}{(n-1)x^{n-1}}$
$\mathbb{R}$	e^x	e^x
$\mathbb{R}$	$\cos(x)$	$\sin(x)$
$\mathbb{R}$	$\sin(x)$	$-\cos(x)$

1.3 Opérations sur les primitives

1.3.1 Linéarité

Propriété 2 :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et k une constante réelle.
- Si F est une primitive de f sur I, alors $k \times F$ est une primitive de $k \times f$ sur I.
- Si F est une primitive de f sur I et G une primitive de g sur I alors $F + G$ est une primitive de $f + g$ sur I.

Exercice 1 : Déterminer toutes les primitives des fonctions suivantes :

(-1-) $f_1(x) = 2x^2 - 3x^4 + 10$ sur $I_1 = \mathbb{R}$

(-2-) $f_2(x) = \dfrac{x^3}{2} - \dfrac{2}{5}x^2 + \pi\ x$ sur $I_2 = \mathbb{R}$

(-3-) $f_3(x) = \dfrac{3}{\sqrt{x}} - \cos(x)$ sur $I_3 = \mathbb{R}^{+*}$

1.3.2 Composition

Pour une fonction u définie et dérivable sur une intervalle I :

Fonction f de la forme	Primitives de f avec $k \in \mathbb{R}$	Intervalle
$u' \times u^n$ avec $n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1} + k$	I
$\dfrac{u'}{u}$	$\ln(u) + k$	pour tout $x \in I$ où $u(x) > 0$
$\dfrac{u'}{u^n}$ avec n entier et $n \geq 2$	$\frac{-1}{(n-1)u^{n-1}} + k$	pour tout $x \in I$ où $u(x) \neq 0$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u} + k$	pour tout $x \in I$ où $u(x) > 0$
$u' \times e^u$	$e^u + k$	I
$x \mapsto u'(ax+b)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a} \times u(ax+b) + k$	I
$u' \times \cos(u)$	$\sin(u) + k$	I
$u' \times \sin(u)$	$-\cos(u) + k$	I

Exercice 2 : Déterminer une primitive des fonctions suivantes :

(-1-) $f_1(x) = 7x\left(x^2+1\right)^4$ sur $I_1 = \mathbb{R}$

(-2-) $f_2(x) = \dfrac{5}{(2x-1)^3}$ sur $I_2 =]1; +\infty[$

(-3-) $f_3(x) = \dfrac{e^{3x}}{e^{3x}+1}$ sur $I_3 = \mathbb{R}$

1.4 Primitive prenant une valeur en un point donné

Propriété 3 :

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Soit x_0 un réel de I et a un réel quelconque. Il existe une unique fonction F, primitive de f sur I telle que $F(x_0) = a$.

Exercice 3 : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ telle que $F(2) = 3$.

2 Équations différentielles

2.1 Vocabulaire

Soit f une fonction de variable réelle x et n fois dérivable sur un intervalle I ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$ où n est un entier naturel.

Définition 2 :

Une équation différentielle d'ordre n sur I est une relation entre la variable x, la fonction f et ses fonctions dérivées f', f'',..., $f^{(n)}$.

Exemple 3 :

• $f^2(x) - f'(x) = x^3$ est une équation différentielle du 1er ordre. (*du premier ordre car f est dérivée au maximum une fois dans cette équation.*)
• $f'''(x) + 2f''(x) - \cos(x) = 0$ est une équation différentielle d'ordre 3. (*d'ordre 3 car f est dérivée au maximum 3 fois dans cette équation. On note en général $f^{(3)}(x)$ au lieu de $f'''(x)$.*)

Notation :
On écrit généralement une équation différentielle en remplaçant f par y, f' par y', f'' par y'' ....
Les équations différentielles de l'exemple précédent s'écrivent donc : $y^2 - y' = x^3$ et
$y^{(3)} + 2y'' - \cos(x) = 0$.

Définition 3 :

• Une fonction f définie et dérivable sur I qui vérifie une équation différentielle est dite solution particulière sur I de l'équation différentielle.
• Résoudre sur un intervalle I une équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions solutions sur I et faire apparaître la forme générale des solutions.

Exercice 4 : Vérifier que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ donnée est bien solution particulière de l'équation différentielle (E) :

(a) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{\frac{1-4x}{3}}$ et (E) : $6y' + 8y = 0$

(b) pour tout $x \in \mathbb{R}$, $h(x) = e^{3x+1} - 2$ et (E) : $y' = 3y + 2$

Remarque :
Soit f une fonction continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.
f admet donc des primitives sur I et on note F une de ces primitives. F vérifie alors $F' = f$ donc F est solution de l'équation différentielle $y' = f$.
Résoudre l'équation différentielle $y' = f$ sur I revient donc à trouver toutes les primitives de f sur I.

Exercice 5 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y' = x^2 + \cos(x)$.

2. Déterminer la solution F de l'équation différentielle (E) : $y' = e^{2x}$ vérifiant $F(0) = -1$.

2.2 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay$ où a est un réel

Définition 4 :

L'équation différentielle $y' = ay$ avec a un réel est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre à coefficients constants.

Propriété 4 :

• L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $y(x) = Ce^{ax}$ où C est un réel.
• Pour tous réels x_0 et y_0, l'équation différentielle $y' = ay$ admet une unique solution y telle que $y(x_0) = y_0$.

Exercice 6 : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations différentielles suivantes :
$(E_1)\ :\ y' = 5y$ et $(E_2)\ :\ 4y' + 3y = 0$

2.3 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + b$ où $a \neq 0$ et b sont des réels

Définition 5 :

L'équation différentielle $y' = ay + b$ est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants avec second membre.

Propriété 5 :

L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' = ay + b$ est l'ensemble des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $x \to \frac{-b}{a} + Ce^{ax}$ où C est un réel.

Exercice 7 :

1. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation différentielle : $(E)\ :\ 2y' + 3y = 2$.

2. Déterminer la solution y de l'équation différentielle $(E)\ :\ 2y' + 3y = 2$ telle que $y(2) = \frac{-1}{3}$.

2.4 Résolution de l'équation différentielle $y' = ay + f$ avec a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I

Soit a un réel non nul et f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Propriété 6 :

On pose :

$$(E) \quad : \quad y' = ay + f \quad \text{et} \quad (E_H) \quad : \quad y' = ay$$

En notant f_0 une **solution particulière** de l'équation différentielle (E), pour toute solution y de cette équation alors la fonction $y - f_0$ est solution de l'équation (E_H).
On a alors :

$$S = \{Ce^{ax} + f_0(x) | C \in \mathbb{R}\}$$

Exercice 8 : Soit (E) l'équation différentielle $2y' + 3y = 6x + 1$.

1. Déterminer la fonction affine f_0 définie sur $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = 2x + p$ solution particulière de (E).
2. En déduire toutes les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.
3. En déduire l'unique solution h de (E) telle que $h(2) = 0$.