Chapitre 6

Orthogonalité de l'espace.

Table des matières

1 Orthogonalité

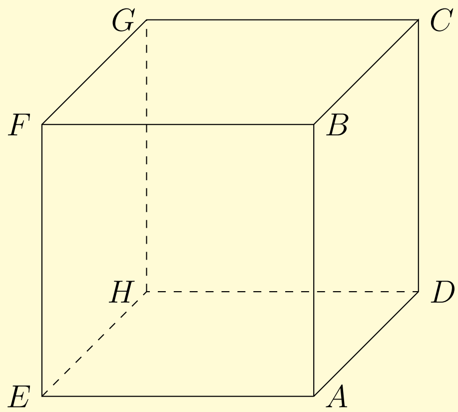
1.1 Orthogonalité dans l'espace

Définition 1 :

- Deux droites sont dites orthogonales lorsque leurs parallèles respectives passant par un même point sont perpendiculaires.
- Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux lorsque les droites dirigées par ces vecteurs sont orthogonales.
- Une droite est orthogonale à un plan lorsqu'elle est orthogonale à toutes les droites de ce plan.

Exemple 1 :

On considère le cube $ABCDEFGH$. Les droites (BC) et (EA) sont orthogonales.



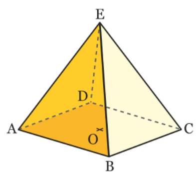
Propriété 1 :

- Deux droites sont orthogonales si, et seulement si, leurs vecteurs directeurs respectifs sont orthogonaux.
- Une droite est orthogonale à un plan si, et seulement si, un vecteur directeur de la droite est orthogonal à une base de ce plan.
- Une droite est orthogonale à un plan si elle est orthogonale à deux droites sécantes de ce plan.

Exemple 2 :

Dans le cube précédent, la droite (BA) est orthogonale au plan (EHD).

Exercice 1 : $ABCDE$ est une pyramide à base carrée telle que les faces issues de E sont des triangles isocèles. On note O le centre du carré $ABCD$.
Montrer que la droite (EO) est orthogonale au plan (ABC).



1.2 Vecteur normal

Définition 2 :

On considère une droite orthogonale à un plan. Tout vecteur directeur de cette droite est appelé vecteur normal au plan.
En conséquence un plan est défini par un point et un vecteur directeur.

Exemple 3 :

Dans le cube précédent, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normale des plans (BCG) et (EHA).

Remarque : Pour un plan $\mathcal{P}$, il y a une infinité de vecteurs normaux au plan $\mathcal{P}$, tous colinéaires entre eux.

2 Produit scalaire

2.1 Définitions

Définition 3 :

Définition avec les angles
Soit deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, on définit le produit scalaire, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$, par le nombre réel :

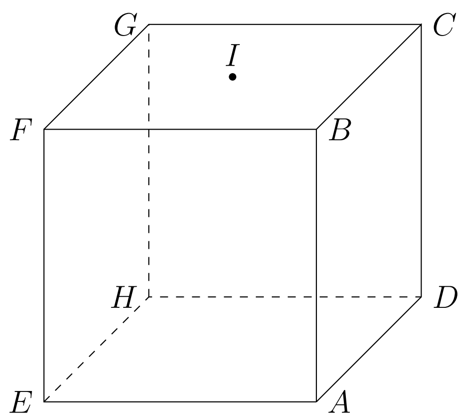
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos(\vec{u}, \vec{v})$$

Définition 4 :

Définition avec les projections
On considère trois points O, A et B.
On a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \overline{OA} \times \overline{OH}$ où H est le projeté orthogonal de B sur (OA), et $\overline{OA}$ est la mesure algébrique de OA.

- Si A et H sont du même côté par rapport à O, on a : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \times OH$.
- Sinon : $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -OA \times OH$

Exercice 2 : On considère le cube $ABCDEFGH$. I le centre du carré $BCGF$. Déterminer le produit scalaire $\overrightarrow{ED} \cdot \overrightarrow{EI}$.



2.2 Propriétés

Propriété 2 :

Pour tous vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$, on a :

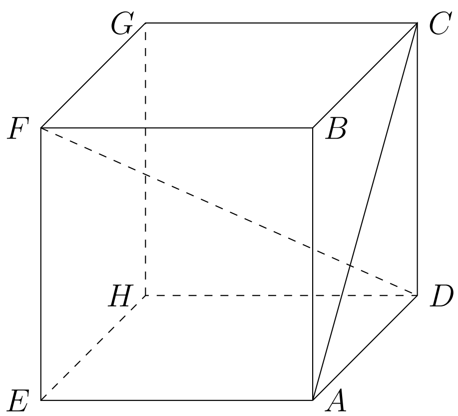
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times \vec{u} \cdot \vec{v}$, où $k \in \mathbb{R}$
- $\vec{u}^2 = \vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2$ (Carré scalaire)
- Identité remarquables :
$$(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$$
$$(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} - \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$$
- Formules de polarisation :
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2\right]$$
$$\vec{u}.\vec{v} = \frac{1}{2}\left[\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right]$$

Propriété 3 :

Deux vecteurs non nuls sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$$

Exercice 3 : On considère le cube $ABCDEFGH$.Montrer que les droites (FD) et (AC) sont orthogonales.



2.3 Géométrie analytique

Définition 5 :

Une base orthonormée de l'espace est la donnée de trois vecteurs linéairement indépendants $\vec{i}$, $\vec{j}$ et $\vec{k}$ tels que $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1$ et $\vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{i}.\vec{k} = 0$.

On se place maintenant dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

Définition 6 :

Définition avec les coordonnées

Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$, on définit le produit scalaire par :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = aa' + bb' + cc'$$

Exemple 4 :

Pour $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$, on a :

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= 3\times 5 + (-2)\times 1 + 1\times(-4) \\ &= 9 \end{aligned}$$

Exercice 4 : En se plaçant dans un repère adéquat, reprendre l'exercice 3.

Propriété 4 :

- Pour tout vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, on a

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

- Pour les points $A(x_A\,;y_A\,;z_A)$ et $B(x_B\,;y_B\,;z_B)$, on a :

$$AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Propriété 5 :

Dans un repère orthonormé, une équation de la sphère de centre $\Omega(a\,;b\,;c)$ et de rayon R est $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Exercice 5 : Déterminer une équation de la sphère de centre $A(5, 2, -1)$ et de rayon $R = 4$.

3 Équation cartésienne d'un plan

Propriété 6 :

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

On considère un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ et un point $A(x_A;y_A;z_A)$.

Le plan $\mathcal{P}$ qui passe par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ admet pour équation cartésienne

$$ax+by+cz+d=0$$

où $d=-(ax_A+by_A+cz_A)$.

Exemple 5 :

Pour un vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-3\\2\\-1\end{pmatrix}$ et un point $A(1;2;3)$. Une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ passant par le point A et de vecteur normal $\vec{n}$ est :

$$\mathcal{P}\ :\ -3x+2y-z+2=0$$

Exercice 6 : On considère les points $A(-1,-2,4)$, $B\left(0,-\dfrac{1}{2},5\right)$ et $C(2,3,10)$.

1. Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}4\\-3\\\dfrac{1}{2}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC).
2. En déduire une équation cartésienne du plan (ABC).

4 Projection orthogonale

Dans toute cette partie, l'espace est muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{i}\,,\vec{j}\,,\vec{k})$.

4.1 Projection orthogonale d'un point sur un plan ou sur une droite

Définition 7 :

On considère un plan $\mathcal{P}$ de l'espace de vecteur normal $\vec{n}$ et un point M de l'espace.
Le projeté orthogonal de M sur P est l'intersection du plan et de la droite de vecteur directeur $\vec{n}$ passant par M.

Remarque : Si $M\in\mathcal{P}$. Le projeté de M est M.

Exercice 7 : On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(5\,;\,1\,;\,3)$ sur le plan $\mathcal{P}$.

Définition 8 :

On considère une droite d de vecteur directeur $\vec{u}$ et un point M de l'espace.
Le projeté orthogonal de M sur d est l'intersection du plan normal à $\vec{u}$ passant par M avec la droite d.

Remarque : Si $M \in d$. Le projeté de M est M.

Exercice 8 : On considère la droite d passant par $B(1, -2, 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal du point $A(2\,;\,-1\,;\,3)$ sur la droite d.

4.2 Distance d'un point à un plan

Définition 9 :

Soient $\mathcal{P}$ un plan de l'espace et A un point. La distance du point A au plan $\mathcal{P}$ est la plus petite des longueurs AM où $M \in \mathcal{P}$. On note cette distance $d(A, \mathcal{P})$:

$$d(A, \mathcal{P}) = \min \{AM | M \in \mathcal{P}\}$$

Propriété 7 :

Si on note H le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{P}$, alors $d(A, \mathcal{P}) = AH$.

Exercice 9 : On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.
Déterminer la distance du point $A(5\,;\,1\,;\,3)$ au plan $\mathcal{P}$.

Propriété 8 :

Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point. Si on note $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $M(x; y; z)$ un point de $\mathcal{P}$, alors :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercice 10 : On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.
Déterminer la distance du point $A(5\,;\,1\,;\,3)$ au plan $\mathcal{P}$.

4.3 Distance d'un point à une droite

Définition 10 :

Soient $\mathcal{D}$ une droite de l'espace et A un point. La distance du point A à la droite $\mathcal{D}$ est la plus petite des longueurs AM où $M \in \mathcal{D}$. On note cette distance $d(A, \mathcal{D})$:

$$d(A, \mathcal{D}) = \min \{AM | M \in \mathcal{D}\}$$

Propriété 9 :

Si on note H le projeté orthogonal de A sur le plan $\mathcal{D}$, alors $d(A, \mathcal{D}) = AH$.

Exercice 11 : On considère la droite d passant par $B(1, -2, 4)$ et de vecteur directeur $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
Déterminer la distance du point $A(2\,;\,-1\,;\,3)$ à la droite d.

Propriété 10 :

Soient $\mathcal{P}$ le plan d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ et $A(x_A; y_A; z_A)$ un point. Si on note $\vec{n}$ un vecteur normal de $\mathcal{P}$ et $M(x; y; z)$ un point de $\mathcal{P}$, alors :

$$d(A, \mathcal{P}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Exercice 12 : On considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x + y - z - 2 = 0$.
Déterminer la distance du point $A(5\,;\,1\,;\,3)$ au plan $\mathcal{P}$.