

Chapitre 12

Intégrales

Table des matières

1	Intégrale d'une fonction continue et positive	2
2	Intégrale d'une fonction continue	4
2.1	Extension de la notion d'intégrale	4
2.2	Propriétés de l'intégrale	5
2.3	Intégration par parties	7
2.4	Intégrale et aire	7
2.5	Valeur moyenne d'une fonction continue	8

Dans tout le chapitre, la fonction f est une fonction définie sur l'intervalle I , en notant $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal. L'unité d'aire, notée u.a est l'aire du carré de coté 1 dans le repère.

1 Intégrale d'une fonction continue et positive

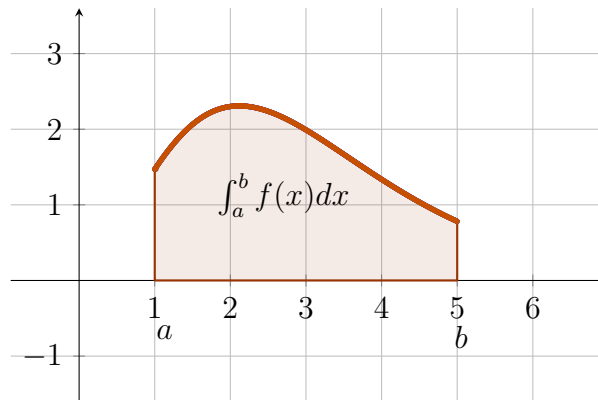


Définition 1 :

Soit f une fonction continue et POSITIVE sur un intervalle I , a et b des réels de I , tels que $a < b$ et $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthogonal.

On appelle intégrale de f de a à b , l'aire en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites verticales d'équation $x = a$ et $x = b$.

On note cette aire : $\int_a^b f(x) dx$ (se lit intégrale de a à b de $f(x) dx$)



Remarques :

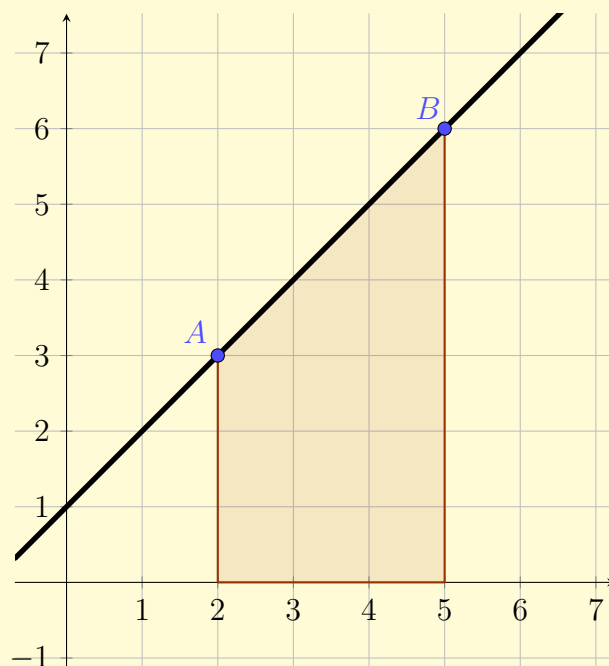
- Pour toute fonction continue et positive f sur I , $\int_a^b f(x) dx$ est un réel positif ou nul.
- L'intégrale ne dépend pas du choix de la variable :

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(t) dt = \int_a^b f(u) du \quad (\text{la variable est muette})$$

- a et b sont appelées les bornes de l'intégrale.

Exemple 1 :

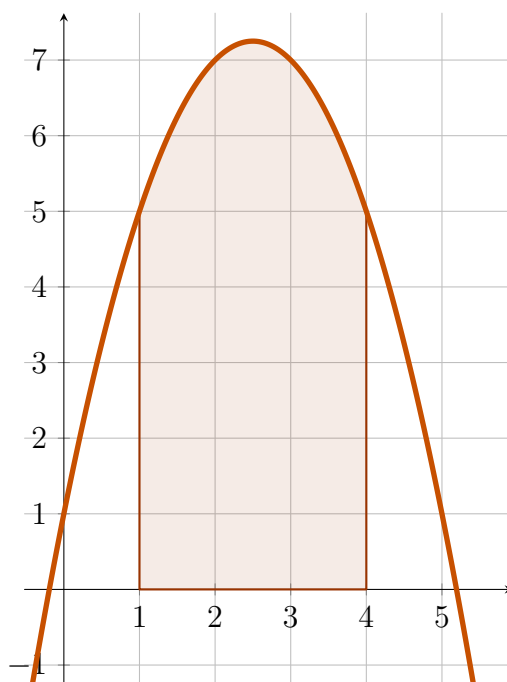
Pour la fonction f définie par $f(x) = x + 1$:



On a : $\int_2^5 f(x) dx = 13,5$.

Exercice 1 : On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 5x + 1$.

Déterminer une valeur approchée de $I = \int_1^4 f(x) dx$



Théorème 1 :

Soit f une fonction continue et positive sur $[a; b]$.

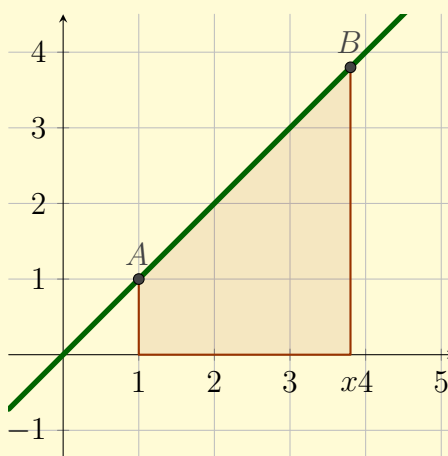
La fonction F_a définie sur $[a; b]$ par $F_a(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

Exemple 2 :

Pour la fonction $f(x) = x$. En utilisant la formule de l'aire d'un trapèze, on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \frac{(1+x)(x-1)}{2} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Ce qui correspond bien à la primitive de la fonction f s'annulant en 1.



2 Intégrale d'une fonction continue

2.1 Extension de la notion d'intégrale

Définition 2 :

Extension au cas d'une fonction continue de signe quelconque sur $[a; b]$

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive de f sur I et a et b des réels de I . L'intégrale de la fonction f entre a et b est le nombre :

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Remarque :

En pratique, pour calculer $\int_a^b f(x) dx$, on détermine d'abord une primitive F de f sur $[a; b]$ et on écrit : $\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$.

Exemple 3 :

On considère la fonction f définie par $f(x) = -x^2 + 5x + 1$ de l'exercice 1.
Une primitive de f est :

$$F(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x$$

On a donc :

$$\begin{aligned} I &= \int_1^4 f(x) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{2}x^2 + x \right]_1^4 \\ &= \left(-\frac{1}{3} \times 4^3 + \frac{5}{2} \times 4^2 + 4 \right) - \left(-\frac{1}{3} \times 1^3 + \frac{5}{2} \times 1^2 + 1 \right) \\ &= \frac{68}{3} - \frac{19}{6} \\ &= \frac{39}{2} \end{aligned}$$

Exercice 2 : Calculer :

$$\bullet I_1 = \int_{-2}^5 3 dt \quad \bullet I_2 = \int_1^{-1} u^2 du \quad \bullet I_3 = \int_1^4 (-x^3 + 4x^2 - x + 1) dx$$

Propriété 1 :

- Pour tout réel a , $\int_a^a f(t) dt = F(a) - F(a) = 0$ donc $\int_a^a f(t) dt = 0$
- Pour tous réels a et b , $\int_b^a f(t) dt = -\int_a^b f(t) dt$

2.2 Propriétés de l'intégrale**Théorème 2 :****Linéarité de l'intégrale**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[a; b]$. Soit λ un réel.

- $\int_a^b (f(t) + g(t)) dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$
- $\int_a^b \lambda f(t) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt$

Théorème 3 :**Relation de Chasles**

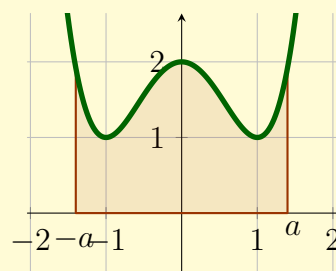
Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Pour tous réels a , b et c de I ,

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$$

Exemple 4 :

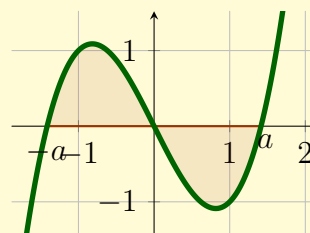
- Pour une fonction paire :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$



- Pour une fonction impaire :

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



Exercice 3 : Calculer : $\int_{-2}^5 (|x| - 2) dx$

Théorème 4 :**Positivité et ordre**

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I , et a et b des réels de I tels que $a \leq b$.

- Si pour tout $t \in [a; b]$, $f(t) \geq 0$ alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$
- Si pour tout $t \in [a; b]$, $f(t) \leq g(t)$ alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

Remarque :

Les réciproques de ces deux propriétés sont fausses.

On a : $\int_{-1}^2 x dx = \frac{3}{2} \geq 0$ mais $x \leq 0$ pour $x \in [-1; 0]$

Exercice 4 :

1. Démontrer que pour tout $x \in [0; 1]$, $0 \leq e^{x^2} \leq e^x$.

2. En déduire que : $0 \leq \int_0^1 e^{x^2} dx \leq e - 1$

2.3 Intégration par parties

Théorème 5 :

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I , et dont les dérivées u' et v' sont continues sur I . Soient a et b deux réels de I .

$$\int_a^b u(x) \times v'(x) \, dx = [u(x) \times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x) \times v(x) \, dx$$

Exercice 5 : Calculer les intégrales suivantes :

$$I_1 = \int_1^e x \ln(x) \, dx \qquad I_2 = \int_0^{\ln(2)} (x-1)e^x \, dx$$

2.4 Intégrale et aire

Théorème 6 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , et a et b deux réels de I tels que $a < b$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe représentant f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $\mathcal{A}$ l'aire du domaine délimité par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$.

- Si f est positive sur $[a; b]$, alors $\mathcal{A} = \int_a^b f(t) \, dt$ u.a.
- Si f est négative sur $[a; b]$, alors $\mathcal{A} = -\int_a^b f(t) \, dt$ u.a.
- Si f n'est pas de signe constant sur $[a; b]$, alors $\mathcal{A} = \int_a^b |f(t)| \, dt$.

Exercice 6 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 4x + 3$. Soit $\mathcal{C}$ la courbe de f dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ avec $\|\vec{i}\| = 2$ cm et $\|\vec{j}\| = 1,5$ cm.

Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 de la partie du plan délimitée par $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

Théorème 7 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et a, b des réels de I avec $a < b$. On suppose que $f \leq g$ sur $[a; b]$.

Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie délimitée par les courbes de f , de g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$. On a alors : $\mathcal{A} = \int_a^b (g(x) - f(x)) \, dx$ u.a

Exercice 7 : On considère les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$ et $g(x) = -3$. Calculer l'aire située entre les courbes de f et de g et les droites d'équation $x = 0$ et $x = 3$.

2.5 Valeur moyenne d'une fonction continue

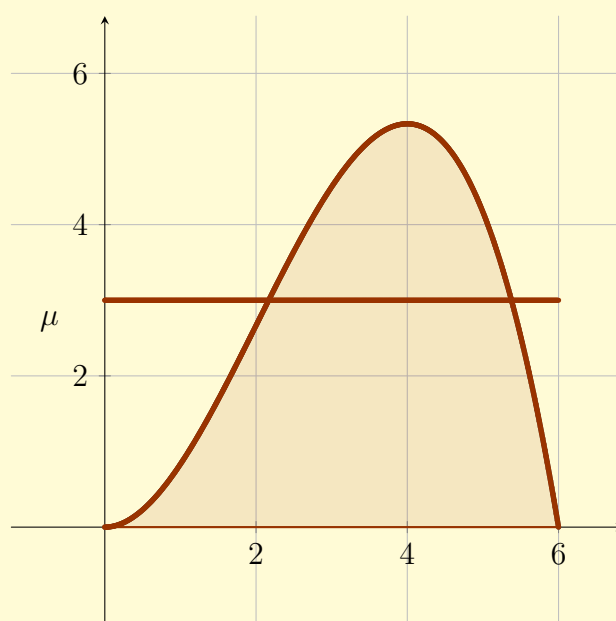
Définition 3 :

Soit a et b deux réels avec $a < b$ et f une fonction continue sur $[a; b]$.
La valeur moyenne de f sur $[a; b]$ est le nombre μ défini par :

$$\mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Exemple 5 :

L'aire de la partie délimitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à celle du rectangle de largeur $b - a$ et de hauteur μ .



Exercice 8 : Lors d'une épidémie de grippe dans un lycée, le nombre de malades, t jours après l'apparition des premiers cas, est modélisé par la fonction f définie sur $[0; 6]$ par : $f(t) = 6t^2 - t^3$.

1. Calculer la valeur moyenne μ de la fonction f sur l'intervalle $[0; 6]$.
2. Interpréter ce résultat.

Propriété 2 :

Inégalité de la moyenne

Soit a, b des réels et $a < b$, f continue sur $[a; b]$ et soit m et M des réels tels que pour tout $x \in [a; b]$, $m \leq f(x) \leq M$ alors

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$