Chapitre 1

Vecteurs, droites et plan de l'espace 1

Table des matières

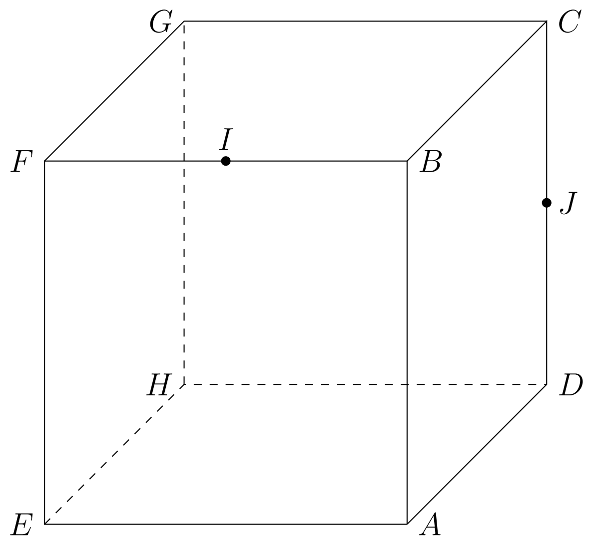
1 Droites et plans.

1.1 Propriétés

Propriété 1 :

- 3 points A,B et C non alignés définissent un plan. On note ce plan (ABC).
- Une droite et un point extérieur à la droite définissent un plan.
- Soit $\mathcal{P}$ un plan et d une droite appartenant à ce plan. Alors tout point M de la droite d appartient au plan $\mathcal{P}$.

Exercice 1 : On considère le cube $ABCDEFGH$. On note I le milieu de $[FB]$ et J le milieu de $[DC]$. Dessiner la section du cube et du plan (GIJ).



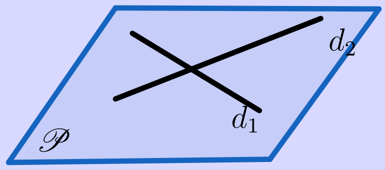
Définition 1 :

On dit que des points ou des droites sont coplanaires s'ils ou elles appartiennent à un même plan.

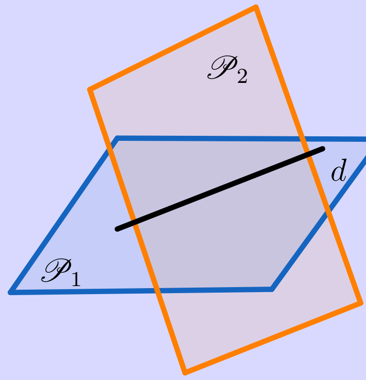
1.2 Positions relatives de droites et de plans dans l'espace

Propriété 2 :

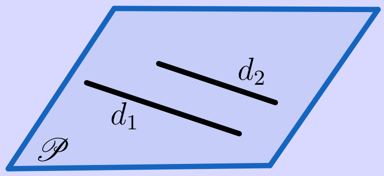
- Deux droites parallèles ou sécantes sont coplanaires.



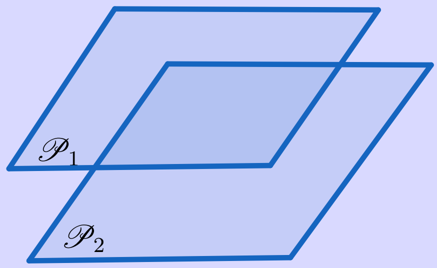
- Si deux plans sont sécants et non confondus alors leur intersection est une droite.



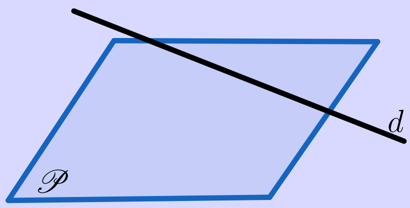
- Deux droites sont parallèles lorsqu'elles sont coplanaires et sans point commun, ou lorsqu'elles sont confondues.



- Deux plans sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun, ou lorsqu'ils sont confondus.

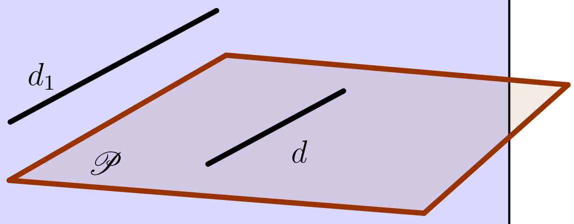


- Une droite et un plan sont parallèles lorsqu'ils n'ont aucun point commun, ou lorsque la droite appartient au plan.

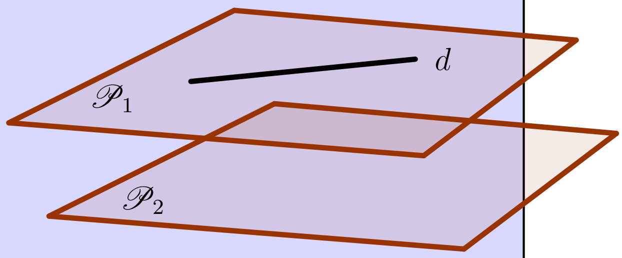


Propriété 3 :

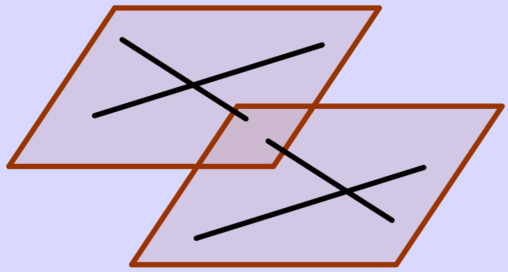
- Si une droite d_1 est parallèle à une droite d, alors la droite d_1 est parallèle à tout plan $\mathscr{P}$ contenant la droite d.



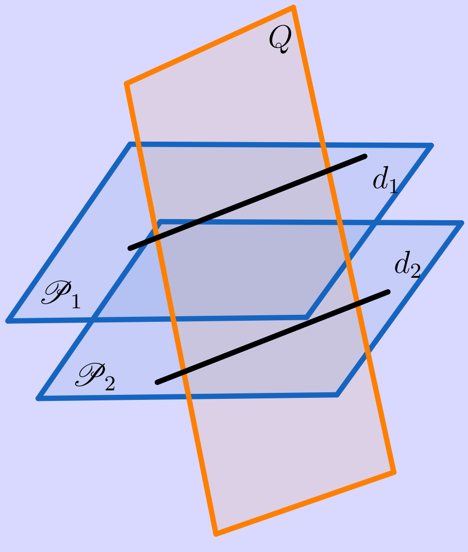
- Si deux plans sont parallèles alors toute droite contenue dans un des plans est parallèle à l'autre.



- Deux plans sont parallèles si et seulement si deux droites sécantes de l'un sont parallèles à deux droites sécantes de l'autre.



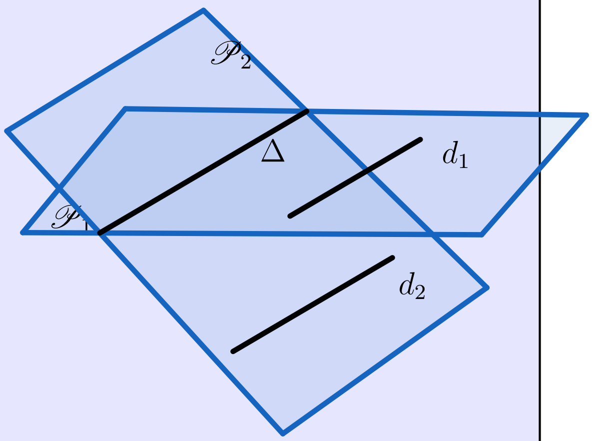
- Si deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sont parallèles alors tout plan Q qui coupe $\mathcal{P}_1$ coupe aussi $\mathcal{P}_2$ et les droites d'intersection d_1 et d_2 sont parallèles.



Théorème 1 :

Théorème du "toit".

Soit deux plans $\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ sécants suivant une droite Δ, d_1 une droite du plan $\mathcal{P}_1$, parallèle à une droite d_2 du plan $\mathcal{P}_2$. Alors la droite Δ est parallèle aux droites d_1 et d_2.



2 Vecteurs de l'espace.

2.1 Translation

Définition 2 :

Soit deux points A et B de l'espace. La translation t de vecteur AB est la transformation qui associe à tout point C en un point D tel que $\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}$.

2.2 Vecteurs colinéaires

Définition 3 :

On dira que 2 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ sont colinéaires s'il existe un réel k tel que

$$\vec{u} = k\vec{v}$$

2.3 Vecteurs coplanaires

Définition 4 :

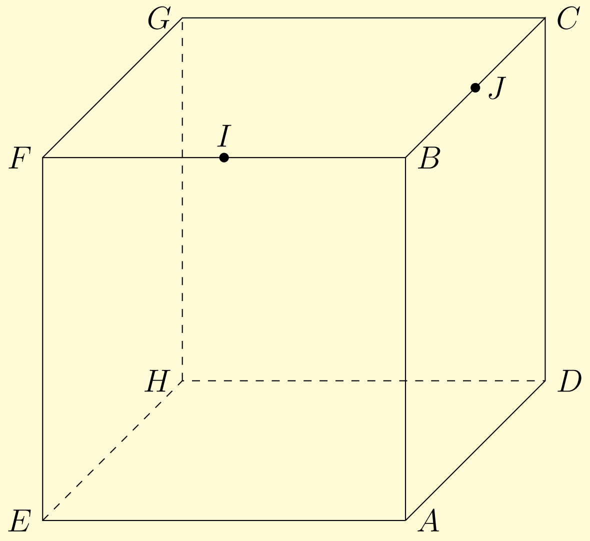
On dira que 3 vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires (ou liés) si un de ces vecteurs peut s'écrire comme combinaison linéaire des deux autres.

Ou encore :

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}, \exists \beta \in \mathbb{R}, \exists \gamma \in \mathbb{R} \text{tel que } (\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0) \text{ et } \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0}$$

Exemple 1 :

On considère le cube $ABCDEFGH$. On note I le milieu de $[FB]$ et J le milieu de $[BC]$.



Les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{FG}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

3 Coordonnées d'un vecteur

3.1 Base de l'espace

Définition 5 :

On appelle base tout triplet de vecteurs non coplanaires.
Autrement dit, $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ forment une base de l'espace si :

$$\forall(\alpha, \beta, \gamma) \in \mathbb{R}^3, \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} + \gamma\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0$$

On dira alors que les vecteurs sont linéairement indépendants.

3.2 Coordonnées d'un vecteur de l'espace

Définition 6 :

On munit l'espace d'une base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. Pour tout vecteur $\vec{u}$, il existe une unique triplet (x, y, z) de réels tel que :

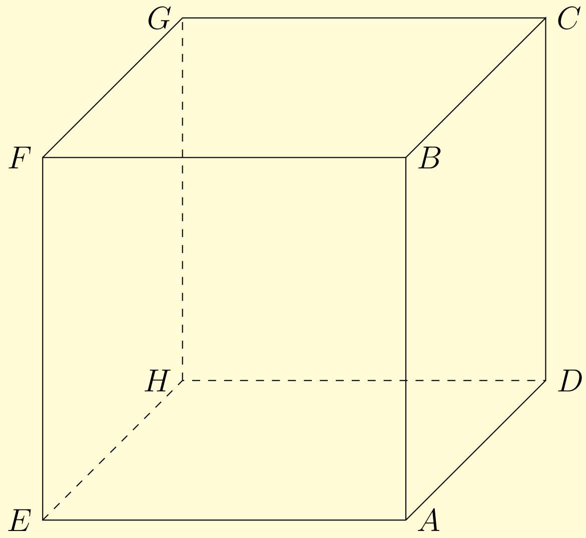
$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

Ce triplet s'appelle coordonnées du vecteur $\vec{u}$ dans la base $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On notera alors :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Exemple 2 :

On considère le cube $ABCDEFGH$:



Citer différentes bases.

3.3 Repère de l'espace

Définition 7 :

Un repère de l'espace est un couple définie par un point et une base. Pour un point O, appelé origine du repère, et une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on définie ainsi le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

3.4 Coordonnées d'un point de l'espace

Définition 8 :

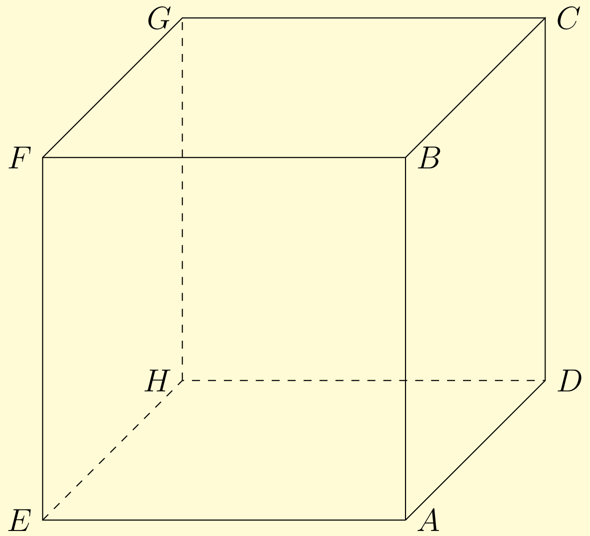
On se place dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On appellera coordonnées du point M les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On notera alors : $M(x, y, z)$.

Exemple 3 :

On considère le cube $ABCDEFGH$:



On se place dans la base $(A, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AE})$. Donner les coordonnées des 8 points.

Exercice 2 : Retrouver les coordonnées du milieu de deux points.

3.5 Coordonnées d'un vecteur défini par deux points

Propriété 4 :

Soit $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B, z_B\right)$, les coordonnées de $\overrightarrow{AB}$ sont $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$

4 Représentation paramétrique d'une droite

Propriété 5 :

Soit d une droite définie par un point $A\left(x_A, y_A, z_A\right)$ et un vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Pour tout point $M(x, y, z)$ de d, il existe un réel k tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & x_A + k \times a \\ y & = & y_A + k \times b \\ z & = & z_A + k \times c \end{array}\right.$$

Cette présentation s'appelle représentation paramétrique de la droite d. (elle n'est pas unique...)

Exemple 4 :

On considère la droite d dont on donne une représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 5+3k \\ y & = & -1+k \\ z & = & 2-4k \end{array}\right. ,k \in \mathbb{R}$$

On peut naturellement dire que le point $(5,-1,2)$ appartient à la droite, et que le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite.

Déterminer deux autres points de la droite. Et deux points extérieur à la droite.

Exercice 3 : Pour deux points $A(-3,2,4)$ et $B(3,0,-2)$. Justifier que la droite (AB) admet une représentation paramétrique suivante :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -9+3k \\ y & = & 4-k \\ z & = & 10-3k \end{array}\right. ,k \in \mathbb{R}$$