Chapitre 3

Combinatoire et dénombrement

Table des matières

1 Cardinale d'un ensemble

1.1 Définition

Définition 1 :

On dira qu'un ensemble E est fini si il contient un nombre fini d'élément.
Pour un ensemble E fini, on note $|E|$ (ou $\text{Card}(E)$ son cardinal, c'est à dire le nombre de ces éléments.

Exemple 1 :

1. Soit E_1 l'ensemble des entiers entre 0 et 100.
2. Soit E_2 l'ensemble des lettres de l'alphabet.

1.2 Principe additif

Propriété 1 :

Principe additif :

- On considère deux ensembles finis E_1 et E_2 disjoints. On a alors :

$$|E_1 \cup E_2| = |E_1| + |E_2|$$

- On considère n ensembles finis E_1, E_2,..., E_n deux à deux disjoints. On a alors :

$$|E_1 \cup E_2 \cup ... \cup E_n| = \sum_{k=1}^{n} |E_k|$$

Exercice 1 : Dans la classe de première, 12 élèves ont la spécialité mathématiques, 9 élèves ont la spécialité NSI, 5 élèves ont les deux spécialités et 8 élèves n'ont aucune de ces spécialités. Combien d'élèves composent la classe ?

2 Produit cartésien

2.1 Définitions

Définition 2 :

On considère deux ensembles E_1 et E_2. On appelle produit cartésien de E_1 et E_2, noté $E_1 \times E_2$, l'ensemble des couples formés d'éléments de E_1 et E_2.

$$E_1 \times E_2 = \{(a, b) | a \in E_1, b \in E_2\}$$

Exemple 2 :

Pour $E_1 = \{a, b, c\}$ et $E_2 = \{0, 1\}$, on a :

$$E_1 \times E_2 = \{(a, 0), (a, 1), (b, 0), (b, 1), (c, 0), (c, 1)\}$$

Définition 3 :

- Pour trois ensembles E_1 , E_2 et E_3, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times E_3$ est l'ensemble des triplets formés d'éléments de E_1 , E_2 et E_3.

$$E_1 \times E_2 \times E_3 = \{(a, b, c) | a \in E_1, b \in E_2, c \in E_3\}$$

- Pour p ensembles E_1 , E_2 ,..., E_p, le produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est l'ensemble des p-uplets (ou p-listes) formés d'éléments de E_1 , E_2,..., E_p.

$$E_1 \times E_2 ... \times E_p = \{(a_1, a_2, ..., a_p) | a_1 \in E_1, a_2 \in E_2, ..., a_p \in E_p\}$$

Exemple 3 :

Pour $E = \{0, 1\}$, on note E^3 l'ensemble des triplets d'éléments de E :

$$E^3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 0), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

2.2 Principe multiplicatif

Propriété 2 :

Principe multiplicatif :
Pour p ensembles E_1 , E_2 ,..., E_p, le cardinal du produit cartésien $E_1 \times E_2 \times ... \times E_p$ est le produit des cardinaux :

$$|E_1 \times E_2 \times ... \times E_p| = |E_1| \times |E_2| \times ... \times |E_p|$$

Exercice 2 : Déterminer le nombre de mots de 4 lettres possibles.

3 Dénombrement

3.1 p-uplets d'un ensemble

Propriété 3 :

Soit p et n deux entiers.
Pour un ensemble E à n éléments.
Le nombre de p-uplets formé d'éléments de E est :

$$|E^p| = n^p$$

Exemple 4 :

Le nombre d'octets possibles est : 2^8.

3.2 Parties d'un ensemble

Définition 4 :

Soit E un ensemble à n éléments. Une partie F de E à p éléments est un sous-ensemble de E. L'ensemble des parties de E est noté : $\mathcal{P}(E)$.

Exemple 5 :

1. L'ensemble vide $\varnothing$ est une partie de E.

2. E est une partie de E.

Propriété 4 :

Le nombre de parties d'un ensemble E à n éléments est :

$$|\mathcal{P}(E)| = 2^n$$

Exercice 3 : Pour $E = \{a, b, c\}$. Donner l'ensemble $\mathcal{P}(E)$.

Propriété 5 :

Pour un ensemble E à n éléments, toute partie F de E est associée à une n-liste de $\{0, 1\}$.

Exemple 6 :

Pour $E = \{a, b, c\}$. On associe à la partie $F = \{a, c\}$ la liste $(1, 0, 1)$.