Chapitre 5

Continuité des fonctions de variable réel

Table des matières

1 Composée de fonctions.

Définition 1 :

Soient I, J et K trois intervalles.
On considère deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to K$. On définie la composée de f par g, noté $g \circ f$, la fonction :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} I & \to & K \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

Exemple 1 :

- La fonction définie sur $[5; +\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x-5}$$
est la composée de $x \mapsto x - 5$ par $x \mapsto \sqrt{x}$.
- La fonction définie sur $[0; +\infty[$ par :
$$f(x) = \sqrt{x} - 5$$
est la composée de $x \mapsto \sqrt{x}$ par $x \mapsto x - 5$.

Exercice 1 : On considère deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x \quad \text{et} \quad g(x) = 3x^2 - 1$$

Déterminer les expressions des fonction $f \circ g$ et $g \circ f$

Propriété 1 :

Soient I, J et K trois intervalles.
On considère deux fonctions $f : I \to J$ et $g : J \to K$ dérivables sur leur ensemble de définition.
La fonction composée $g \circ f$ est dérivable sur I, et on a :

$$(g \circ f)' = f' \times g' \circ f$$

Exemple 2 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 3e^{x^2+1}$$

La fonction $x \mapsto x^2 + 1$ est un polynôme, elle est donc dérivable sur $\mathbb{R}$, et la fonction $x \mapsto 3e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$. On a :
$f'(x) = 3 \times (2x) \times e^{x^2+1} = 6xe^{x^2+1}$.

On dispose donc de nouvelles formules de dérivation :

$(u^n)' = nu'u^{n-1}$	$\left(\dfrac{1}{u^n}\right)' = -\dfrac{nu'}{u^{n+1}}$	$(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$
$(e^u)' = u'e^u$	$\cos(u)' = -u'sin(u)$	$\sin(u)' = u'cos(u)$

Exercice 2 : Donner la dérivée des fonction suivante (on admet que les fonctions sont dérivable sur I)

(a) $f_1(x) = (2x^2 + x - 1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$

(b) $f_2(x) = \dfrac{5}{(x^2+1)^4}$ sur $I = \mathbb{R}$

(c) $f_3(x) = \sqrt{4x^2 + 9}$ sur $I = \mathbb{R}$

(d) $f_4(x) = \sin(\pi x)$ sur $I = \mathbb{R}$

2 Notion de continuité

2.1 Fonction continue

Définition 2 :

Soient f une fonction définie sur un intervalle I et a un réel appartenant à I.

- f est continue en a lorsque f admet une limite en a et que cette limite est $f(a)$.
- f est continue sur un intervalle I lorsqu'elle est continue en a pour tout $a \in I$.

Remarque : La représentation graphique d'une fonction continue peut être tracée sans lever le crayon.

Exemple 3 :

La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \text{ si } x < 2 \\ 3 \text{ si } x = 2 \\ x^2 \text{si } x > 2 \end{cases}$$

n'est pas continue en 2.
En effet $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x<2}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ x>2}} f(x) = 4$ mais $f(2) = 3$

Exercice 3 : La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} x + 6 & \text{si} \quad x \leq 3 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 3 \end{cases}$$

Cette fonction est-elle continue en 3 ?

2.2 Opérations et fonctions continues

Propriété 2 :

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

Remarque : Attention, la réciproque est fausse !

Propriété 3 :

- Les fonctions de référence (polynômes, valeur absolue, exponentielle, racine carrée, etc...) sont continues sur leur intervalle de définition.
- La somme et le produit de fonctions continues sur un intervalle I sont continues sur cet intervalle.
- Si f et g sont continues sur I et si g ne s'annule pas sur I, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.
- La composée de fonctions continues est continues.

Exemple 4 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3x^2 - 5x + 3}{x^2 + 5}$$

est continue sur $\mathbb{R}$ car $x \mapsto 3x^2 - 5x + 3$ est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et $x \mapsto x^2 + 5$ est un polynôme, donc elle est continue sur $\mathbb{R}$ et ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4 : Montrer que la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{3xe^x}{x^2 - 2x + 4}$$

est continue sur $\mathbb{R}$

3 Le théorème des valeurs intermédiaires

3.1 Cas général

Théorème 1 :

Théorème des valeurs intermédiaires

Si f est continue sur $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[a\,;\,b]$.

Autrement dit, tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ admet au moins un antécédent par f dans $[a\,;\,b]$.

Remarques : On peut aussi utiliser des limites si f n'est pas définie en a ou b ou bien encore des limites en $-\infty$ ou en $+\infty$.

Exemple 5 :

Si f est une fonction continue sur $[3, 7]$, avec $f(3) < 0$ et $f(7) > 0$, le théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution entre 3 et 7.

Exercice 5 : Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f : x \to e^{3x} + x$. Montrer que, pour tout $k \in [1\,;\,1 + e^3]$, l'équation $f(x) = k$ admet au moins une solution dans $[0\,;\,1]$.

3.2 Cas des fonctions strictement monotones

Théorème 2 :

Corollaire du théorème des valeurs intermédiaire (Théorème de la bijection)
Si f est continue et strictement monotone sur $[a\,;\,b]$ alors, pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution dans $[a\,;\,b]$.

Remarque : On peut aussi étendre ce corollaire aux intervalles ouverts en utilisant les limites.

Exemple 6 :

Si f est une fonction continue sur $[3, 7]$ et strictement croissante sur $[3, 7]$, avec $f(3) < 0$ et $f(7) > 0$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires permet de dire que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique une solution entre 3 et 7.

Exercice 6 : Soit la fonction $f : x \to x^3 - 3x^2 - 1$ définie sur $\mathbb{R}$. Quel est le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$ sur $\mathbb{R}$?

4 Application aux suites

4.1 Application de la continuité

Propriété 4 :

Soient f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I convergeant vers $a \in I$. Alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f(a)$.

Remarque : Autrement dit, $\lim\limits_{n \to +\infty} f(u_n) = f\left(\lim\limits_{n \to +\infty} u_n\right)$.

Exemple 7 :

Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 5$ et (u_n) la suite définie par $u_n = 3 + \dfrac{1}{n+1}$. La suite (u_n) converge vers 3, donc la suite $v_n = f(u_n)$ converge vers $f(3) = 14$ car la fonction f est un polynôme, elle est donc continue en 3.

4.2 Un théorème du point fixe

Théorème 3 :

Théorème du point fixe

Soient f une fonction définie et continue sur un intervalle I dans lui-même et (u_n) la suite définie par un réel $u_0 \in I$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Si (u_n) converge vers $\ell \in I$, alors ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

Remarque : Autrement dit, $f(\ell) = \ell$. Mais attention, ℓ n'est pas forcément la seule solution de l'équation $f(x) = x$.

Exemple 8 :

On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$. On a (u_n) convergente (elle est croissante et majorée...). La limite ℓ de la suite est donc solution de l'équation $f(x) = x$. On trouve donc $\ell = 6$.

Exercice 7 : On considère la suite définie par $u_0 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{3}{u_n + 1}$. On admet que (u_n) est convergente. Déterminer sa limite ℓ.