Bac blanc du Lycée Jean Rostand

Epreuve d'enseignement de spécialité

MATHÉMATIQUES

- Session février 2025 -

Sujet 2

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5

Exercice 1 **5 points**

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$A(1\ ;\ -2\ ;\ -2),\quad B(4\ ;\ 2\ ;\ 4),\quad C(-3\ ;\ -4\ ;\ 0).$$

On considère également la droite Δ passant par les points $M(1\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et $N(3\ ;\ -3\ ;\ 5)$.

1. (a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite Δ.

Solution :

(1 point)

Le vecteur directeur de Δ est donné par :

$\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}3-1\\-3-0\\5-4\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{MN}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$.

La représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 1+2t, \\ y = -3t, \\ z = 4+t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

(b) Vérifier que la droite Δ' passant par $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$ et parallèle à Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -3t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Solution :

(0.5 point)

Une droite parallèle à Δ a le même vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ et passe par l'origine. Sa représentation paramétrique est donc :

$$\begin{cases} x = 2t, \\ y = -3t, \\ z = t, \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Le point $S(6\ ;\ -9\ ;\ 4)$ appartient-il à la droite Δ' ?

Solution :

(0.5 point)

Cherchons t tel que :

$$\begin{cases} 6 = 2t, \\ -9 = -3t, \\ 4 = t. \end{cases}$$

Le système est incompatible, car les deux premières aboutissent à $t = 3$, et la dernière à $t = 4$. Donc $S \notin \Delta'$.

2. (a) Montrer que les points A, B, et C définissent un plan.

Solution :

(0.5 point)

Pour que A, B, et C définissent un plan, il suffit que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne soient pas colinéaires.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas proportionnels (par ex. $3\times(-2) \neq 4\times(-4)$), donc A, B, et C définissent un plan.

(b) Montrer que la droite Δ' est perpendiculaire au plan (ABC).

Solution :

(1 point)

Un vecteur normal au plan (ABC) est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$. Calculons le produit scalaire :

$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2 \times 3 + (-3) \times 4 + 1 \times 6 = 6 - 12 + 6 = 0,$$
$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 2 \times (-4) + (-3) \times (-2) + 1 \times 2 = -8 + 6 + 2 = 0.$$

Le vecteur directeur de Δ' est orthogonal à deux vecteurs du plan (ABC). La droite Δ est donc perpendiculaire au plan.

(c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est :

$$2x - 3y + z - 6 = 0$$

Solution :

(0.5 point)

Une équation du plan (ABC) est de la forme $ax+by+cz+d = 0$, où $(a\ ;\ b\ ;\ c)$ est un vecteur normal au plan, que nous avons identifié comme $(2\ ;\ -3\ ;\ 1)$.

On remplace les coordonnées de $A(1\ ;\ -2\ ;\ -2)$:

$$2 \times 1 - 3 \times (-2) + 1 \times (-2) + d = 0 \implies 2 + 6 - 2 + d = 0 \implies d = -6.$$

L'équation est donc $2x - 3y + z - 6 = 0$.

3. (a) Déterminer les coordonnées du point H, intersection de la droite Δ' et du plan (ABC).

Solution :

(0.5 point)

Les coorodnnées de H vérifient à la fois la représentation paramétrique et l'équation du plan. Le paramètre t vérifie donc l'équation :

$$\begin{array}{rrcl} & 2\times 2t - 3\times(-3t) + t - 6 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & 4t + 9t + t - 6 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & t & = & \dfrac{3}{7} \end{array}$$

On a donc $H\left(\dfrac{6}{7}, -\dfrac{9}{7}, \dfrac{3}{7}\right)$.

(b) En déduire que la distance de O au plan (ABC) est :

$$d = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

Solution :

(0.5 point)

Le point H est le projeté orthogonale de O sur le plan. La distance de O au plan (ABC) est donc la distance OH :

$$OH = \sqrt{\left(\frac{6}{7}\right)^2 + \left(-\frac{9}{7}\right)^2 + \left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{3\sqrt{14}}{7}$$

Exercice 2 — 3 points

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée. Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère une classe de terminale de 40 élèves, avec autant de filles que de garçons. Parmi ces élèves, 30 élèves font la spécialité mathématiques.

1. Sachant que, parmi les filles, 12 font la spécialités mathématiques, combien de garçons ne font pas la spécialité ?

(A) 12 **(B)** 8

(C) 2 **(D)** 10

Solution :

Il reste 18 élèves de spécialité mathématiques de sexe masculin (car sur les 30, 12 sont des filles). Sachant qu'il y a 20 garçon (car il y a autant de fille que de garçon...), il reste donc 2 garçons ne faisant pas la spécialité.
La réponse est donc **(C)** .

2. Pour les élections de délégués, quatre élèves doivent être choisis. On impose alors qu'il y ait deux filles et deux garçon élus. Combien quatuors différents peut-on former ?

(A) $\binom{40}{4}$ **(B)** $\dfrac{40!}{4!}$

(C) $40 \times 39 \times 38 \times 37$ **(D)** $\dfrac{20^2 \times 19^2}{2^2}$

Solution :

- On doit choisir deux filles parmi les 20 possibles. Il y a donc $\binom{20}{2}$ possibilités.
- On doit choisir deux garçons parmi les 20 possibles. Il y a donc $\binom{20}{2}$ possibilités.

Soit au total : $\binom{20}{2} \times \binom{20}{2} = \dfrac{20^2 \times 19^2}{2^2}$.
La réponse est donc **(D)** .

3. Le professeur de mathématiques décide, dans sa spécialité, de faire des groupes de 4 élèves. Combien de groupe différents est-il possible de créer, sachant que chaque groupe doit contenir exactement une fille ?

(A) $12\binom{18}{3}$ **(B)** $\binom{20}{4}$

(C) $12\binom{29}{3}$ **(D)** $30 \times 29 \times 28 \times 27$

Solution :

- Il faut donc choisir une fille parmi les 12 : $\binom{12}{1} = 12$.
- Il reste les 3 garçons à choisir parmi les 18 : $\binom{18}{3}$ possibilité.

Donc au total : $12\binom{18}{3}$.

La réponse est donc **(A)** .

Exercice 3 **6 points**

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = -2$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{3 - u_n}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

Solution :

(1 point)

$$u_1 = \frac{u_0+1}{3-u_0} = \frac{-2+1}{3+2} = -\frac{1}{5}$$

$$u_2 = \frac{u_1+1}{3-u_1} = \frac{-\frac{1}{5}+1}{3+\frac{1}{5}} = \frac{1}{4}$$

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n-1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

Solution :

(0.5 point)

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
        u = (u+1)/(3-u)
    return(u)
```

3. Soit la fonction f définie sur $[-2\ ;\ 3[$ par :

$$f(x) = \frac{x+1}{3-x}$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.
On admet que la fonction f est strictement croissante sur $[-2;\ 3[$.

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n \leqslant u_{n+1} < 1$$

Solution :

(1.5 points)
Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n \leqslant u_{n+1} < 1\text{"}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = -2$ et $u_1 = -\frac{1}{5}$. On a donc bien

$$u_0 \leqslant u_1 < 1$$

  Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n \leqslant u_{n+1} < 1$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc, sachant que la fonction f est croissante sur $[-2\ ;\ 3[$:
  $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) < f(1)$
  $\Rightarrow\quad u_{n+1} \leqslant u_{n+2} < f(1)$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution :

(1 point)
D'après la question précédente, la suite (u_n) est croissante (car $u_n \leqslant u_{n+1}$) et majorée par 1. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{3n-4}{3n+2}$$

Solution :

(1.5 points)

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n = \frac{3n-4}{3n+2}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = -2$ et $\dfrac{3 \times 0 - 4}{3 \times 0 + 2} = -2$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n = \dfrac{3n-4}{3n+2}$ (**Hypothèse de récurrence**).

$$\begin{aligned}
u_{n+1} &= \frac{u_n + 1}{3 - u_n} \\
&= \frac{\frac{3n-4}{3n+2} + 1}{3 - \frac{3n-4}{3n+2}} && \text{Hypothèse de récurrence} \\
&= \frac{\frac{6n-2}{3n+2}}{\frac{6n+10}{3n+2}} && \text{Mise au même dénominateur} \\
&= \frac{3n-1}{3n+5} && \text{Simplification} \\
&= \frac{3n+3-4}{3n+3+2} && \text{Pour faire apparaitre la factorisation} \\
&= \frac{3(n+1)-4}{3(n+1)+2}
\end{aligned}$$

  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

(0.5 point)

Nous sommes devant une forme indéterminée... On a, pour tout entier n, après la factorisation par n, et simplification :

$$u_n = \frac{3 - \frac{4}{n}}{3 + \frac{2}{n}}$$

On a $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{4}{n} = \lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{2}{n} = 0$

Donc par somme et quotient $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \dfrac{3}{3} = 1$.

Exercice 4 **6 points**

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = x + 2 - e^x$$

1. Étudier la convexité de la fonction g sur $[0;+\infty[$.

Solution :

(0.75 point)
La fonction g est définie par $g(x) = x + 2 - e^x$. La fonction g est dérivable sur $[0;+\infty[$. On calcule sa dérivée : $g'(x) = 1 - e^x$,de nouveau dérivable sur $[0;+\infty[$, on a la dérivée seconde : $g''(x) = -e^x$.
g'' est négative sur $[0;+\infty[$, donc g est concave sur cet intervalle.

2. Étudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.

Solution :

0.25 point)
Comme $g'(x) = 1 - e^x$, on observe que g' s'annule en $x = 0$ et $g'(x) < 0$ pour $x > 0$.
Donc, g est décroissante sur $[0;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

Solution :

(1 point)

- La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[0;+\infty[$.
- $g(0) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} = -\infty$, car $g(x) = e^x\left(\frac{x}{e^x} + \frac{2}{e^x} - 1\right)$, avec $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$ par croissance comparée, et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2}{e^x} = 0$.

Sachant que $0 \in]-\infty, 1]$, d'après le corolaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.

4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-1}.

Solution :

(0.5 point)
En utilisant la calculatrice, on trouve

- $g(1,1) \simeq 0,09 > 0$
- $g(1,2) \simeq -0,12 < 0$

On a donc $\alpha \in [1,1;1,2]$.

5. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

Solution :

(0.5 point)
Sachant que la fonction est décroissante sur $[0,+\infty[$, avec comme seul annulateur α, on a donc $g(x) \geq 0$ sur $[0;\alpha]$ et $g(x) \leq 0$ sur $[\alpha;+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. (a) Montrer que, pour tout $x \in [0;+\infty[$,

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x \times g(x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}$$

Solution :

(1 point)
La fonction f est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule jamais sur $[0;+\infty[$. On calcule $f'(x)$ en utilisant la formule du quotient :

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{avec} \quad u(x) = \mathrm{e}^x - 1 \quad \text{et} \quad v(x) = x\mathrm{e}^x + 1.$$

On a $u'(x) = \mathrm{e}^x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x + x\mathrm{e}^x$. Alors :

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\mathrm{e}^x(x\mathrm{e}^x+1) - (\mathrm{e}^x-1)(\mathrm{e}^x+x\mathrm{e}^x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}.$$

Après simplifications, on obtient :

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^x(x+2-\mathrm{e}^x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}$$

Donc $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x \cdot g(x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}$.

(b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$ (sans calculer $f(\alpha)$).

Solution :

(1 point)

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$(xe^x+1)^2$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

- $f(0) = \dfrac{e^0 - 1}{0 \times e^0 + 1} = 0.$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ car on a, après factorisation, $f(x) = \dfrac{1 - \dfrac{1}{e^x}}{x\left(1 + \dfrac{1}{xe^x}\right)}$

2. (a) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha + 1}$.

Solution :

(0.5 point)

On a $f(\alpha) = \dfrac{\mathrm{e}^\alpha - 1}{\alpha \mathrm{e}^\alpha + 1}$. Or, $g(\alpha) = \alpha + 2 - \mathrm{e}^\alpha = 0$, donc $\mathrm{e}^\alpha = \alpha + 2$. En remplaçant :

$$f(\alpha) = \frac{(\alpha+2) - 1}{\alpha(\alpha+2)+1} = \frac{\alpha+1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{1}{\alpha+1}.$$

(b) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

Solution :

(0.5 point)

Avec $\alpha \in [1.1; 1.2]$, on a $\alpha + 1 \in [2.1; 2.2]$, donc, en passant par l'inverse :

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \in \left[\frac{1}{2.2}; \frac{1}{2.1}\right] \approx [0.45; 0.48].$$

3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f au point d'abscisse 0.

Solution :

(0.5 point)

On a $f(0) = 0$ et $f'(0) = \dfrac{\mathrm{e}^0 \cdot g(0)}{(0 \cdot \mathrm{e}^0 + 1)^2} = g(0) = 1$. L'équation de T est donc : $y = x$.

(b) Décrire la méthode à utiliser pour étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite T.

Solution :

(0.5 point)

Pour étudier la position relative, on considère $h(x) = f(x) - x$. On calcule $h'(x)$ et on étudie son signe pour déterminer les intervalles où $\mathcal{C}_f$ est au-dessus ou en dessous de T.