Bac blanc du Lycée Jean Rostand

Epreuve d'enseignement de spécialité

MATHÉMATIQUES

- Session février 2025 -

Sujet 1

Durée de l'épreuve : 4 heures

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées, conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie. Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses, seront valorisées.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5

Exercice 1 — 5 points

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O},\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, on considère les points :

$$P(2\ ;\ -1\ ;\ -1),\quad Q(5\ ;\ 3\ ;\ 5),\quad R(-2\ ;\ -3\ ;\ 1).$$

On considère également la droite Δ passant par les points $M(2\ ;\ 1\ ;\ 5)$ et $N(4\ ;\ -2\ ;\ 6)$.

1. (a) Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 2+2t, \\ y = 1-3t, \\ z = 5+t, \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}.$$

   (b) Donner une représentation paramétrique de la droite Δ', parallèle à Δ et passant par le point $O(0\ ;\ 0\ ;\ 0)$.

   (c) Le point $S(4\ ;\ -6\ ;\ 2)$ appartient-il à la droite Δ' ?

2. (a) Montrer que les points P, Q, et R définissent un plan.

   (b) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (PQR).

   (c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (PQR) est :

$$2x - 3y + z - 6 = 0$$

3. (a) Montrer que le point M appartient au plan (PQR) .

   (b) En déduire la distance de N au plan (PQR).

Exercice 2 **3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.
Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte. Indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la proposition choisie. Aucune justification n'est demandée.
Pour chaque question, une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse ne rapporte ni n'enlève de point.

On considère une classe de terminale de 30 élèves, avec autant de filles que de garçons. Parmi ces élèves, 20 élèves font la spécialité mathématiques.

1. Combien de binôme de délégués peut-on faire si l'on impose qu'il y ait forcement une fille et un garçon ?

   (A) $\binom{15}{2}$ **(B)** 15^2

   (C) 30×29 **(D)** 15×14

2. Sachant que, parmi les filles, 7 font la spécialité mathématiques, combien de garçons ne font pas la spécialité ?

   (A) 13 **(B)** 8

   (C) 3 **(D)** 2

3. Le professeur de mathématiques décide, dans sa spécialité, de faire des groupes de 5 élèves. Combien de groupe différents est-il possible de créer, sachant que chaque groupe doit contenir au moins une fille ?

   (A) $7\binom{19}{4}$ **(B)** $\binom{20}{5}$

   (C) $7\binom{20}{5}$ **(D)** $20 \times 19 \times 18 \times 17 \times 16$

Exercice 3 **6 points**

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$f(x)=\frac{\mathrm{e}^x-1}{x\mathrm{e}^x+1}$$

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire

Soit g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x)=x+2-\mathrm{e}^x$$

1. Étudier la convexité de la fonction g sur $[0;+\infty[$.
2. Étudier le sens de variation de g sur $[0;+\infty[$.
3. Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$.
4. Déterminer un encadrement de α à 10^{-1}.
5. Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0;+\infty[$.

Partie B : Étude de la fonction f

1. (a) Montrer que, pour tout $x\in[0;+\infty[$,

$$f'(x)=\frac{\mathrm{e}^x\times g(x)}{(x\mathrm{e}^x+1)^2}$$

   (b) En déduire le tableau de variation de f sur $[0;+\infty[$ (sans calculer $f(\alpha)$).

2. (a) Montrer que $f(\alpha)=\dfrac{1}{\alpha+1}$.

   (b) Déterminer un encadrement de $f(\alpha)$ à 10^{-2} près.

3. (a) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe $\mathcal{C}_f$ représentant f au point d'abscisse 0.

   (b) Décrire la méthode à utiliser pour étudier la position relative de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de la droite T.

Exercice 4 **6 points**

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{u_n - 4}{u_n + 5}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
      u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

3. Soit la fonction f définie sur $[-2\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x - 4}{x + 5}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

On admet que la fonction f est strictement croissante sur $[-2;\ +\infty[$.

(a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$$

(b) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

4. Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$u_n = \frac{-6n + 7}{3n + 1}$$

5. Déterminer la limite de la suite (u_n).