DS Facultatif -1-

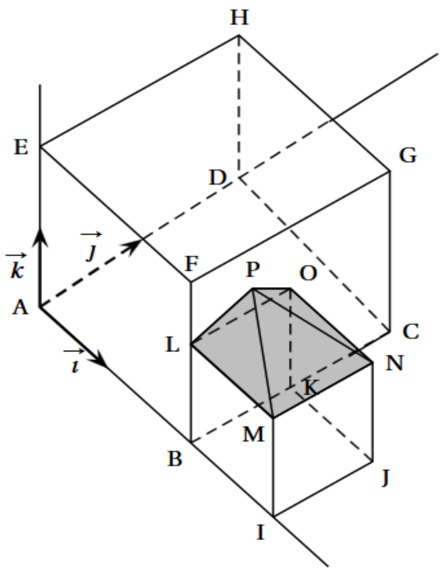
Devoir sur table

Exercice 1 : (10 points)

La figure ci-dessous correspond à la maquette d'un projet architectural.

Il s'agit d'une maison de forme cubique ($ABCDEFGH$) accolée à un garage de forme cubique ($BIJKLMNO$) où L est le milieu du segment $[BF]$ et K est le milieu du segment $[BC]$.

Le garage est surmonté d'un toit de forme pyramidale ($LMNOP$) de base carrée $LMNO$ et de sommet P positionné sur la façade de la maison.



On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A\ ;\ \vec{i},\ \vec{j},\ \vec{k}\right)$, avec $\vec{i} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$ et $\vec{k} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$.

1. (a) Par lecture graphique, donner les coordonnées des points H, M et N.

Solution :

On a : $H(0\ ;\ 2\ ;\ 2)$, $M(3\ ;\ 0\ ;\ 1)$ et $N(3\ ;\ 1\ ;\ 1)$.

(b) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (HM).

Solution :

On a $\overrightarrow{HM}\begin{pmatrix} x_M - x_H \\ y_M - y_H \\ z_M - z_H \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (HM) est dirigée par $\overrightarrow{HM}$ et elle passe par H, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_H + tx_{\overrightarrow{HM}} \\ y = y_H + ty_{\overrightarrow{HM}} \\ z = z_H + tz_{\overrightarrow{HM}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici :

$$\left\{\begin{array}{l} x = 3t \\ y = 2 - 2t \qquad t \in \mathbb{R} \\ z = 2 - t \end{array}\right.$$

2. L'architecte place le point P à l'intersection de la droite (HM) et du plan (BCF).

   Montrer que les coordonnées de P sont $\left(2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$.

Solution :

Dans le repère $\left(A\ ;\ \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on a les coordonnées suivantes :

$B(2\ ;\ 0\ ;\ 0)$ $\qquad C(2\ ;\ 2\ ;\ 0)$ $\qquad F(2\ ;\ 0\ ;\ 2)$

Le plan (BCF) est parallèle au plan (yOz), son équation est donc de la forme $x = c$, $c \in \mathbb{R}$.

Ici on a donc $x = 2$

Cherchons le paramètre t tel qu'un point M_t de paramètre t dans la représentation de (HM) soit un point de (BCF) :

$$M_t \in (BCF) \Leftrightarrow x_{M_t} = 2 \Leftrightarrow 3t = 2 \Leftrightarrow t = \frac{2}{3}$$

P est donc $M_{\frac{2}{3}}$ sur la droite (HM), il a donc comme coordonnées :

$x_P = 2$, $y_P = 2 - 2 \times \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}$ et $z_P = 2 - \frac{2}{3} = \frac{6}{3} - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$.

Cela confirme $P\left(2\ ;\ \frac{2}{3}\ ;\ \frac{4}{3}\right)$

3. (a) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN}$.

Solution :

$\overrightarrow{PM}\begin{pmatrix} x_M - x_P \\ y_M - y_P \\ z_M - z_P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2 \\ 0 - \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{4}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$ et de même : $\overrightarrow{PN}\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$.

Comme le repère est orthonormé, on peut calculer le produit scalaire à l'aide des coordonnées :

$\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = 1 \times 1 - \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 1 - \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{8}{9}$

(b) Calculer la distance PM.

Solution :

$$PM = \sqrt{1^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{4}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{14}{9}} = \frac{\sqrt{14}}{3}$$

On admet que la distance PN est égale à $\dfrac{\sqrt{11}}{3}$.

(c) Pour satisfaire à des contraintes techniques, le toit ne peut être construit que si l'angle $\widehat{MPN}$ ne dépasse pas 55°.
Le toit pourra-t-il être construit ?

Solution :

On sait que $\overrightarrow{PM} \cdot \overrightarrow{PN} = PM \times PN \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

On a donc $\dfrac{8}{9} = \dfrac{\sqrt{14}}{3} \times \dfrac{\sqrt{11}}{3} \times \cos\left(\widehat{MPN}\right)$.

d'où $\cos\left(\widehat{MPN}\right) = \dfrac{8}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$ soit $\widehat{MPN} \approx 50°$.

L'angle ne dépasse pas 55°, le toit peut donc être construit.

4. Justifier que les droites (HM) et (EN) sont sécantes.
Quel est leur point d'intersection ?

Solution :

Les droites (EH) et (MN) sont parallèles donc les droites (HM) et (EN) sont coplanaires et non parallèles , elles sont donc sécantes.

On a $\overrightarrow{EN}\begin{pmatrix} x_N - x_E \\ y_N - y_E \\ z_N - z_E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

La droite (EN) est dirigée par $\overrightarrow{EN}$ et elle passe par E, elle admet donc comme représentation paramétrique : $\begin{cases} x = x_E + tx_{\overrightarrow{EN}} \\ y = y_E + ty_{\overrightarrow{EN}} \\ z = z_E + tz_{\overrightarrow{EN}} \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, soit ici : $\begin{cases} x = 3t' \\ y = t' \\ z = 2 - t' \end{cases}$ $t' \in \mathbb{R}$

Pour trouver l'intersection des droites (EH) et (MN), il faut donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3t = 3t' \\ 2 - 2t = t' \\ 2 - t = 2 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ 2 - 2t = t \\ 2 - t = 2 - t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = t' \\ 2 = 3t \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow t = t' = \frac{2}{3}$$

Le point d'intersection est donc le point P.

Exercice 2 : (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x^2 - 8\ln(x)$$

où ln désigne la fonction logarithme népérien.

On admet que f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$, on note f' sa fonction dérivée.

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

Solution :

On détermine $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0 \\ \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \ln(x) = -\infty\end{array}\right\}$ donc, par somme, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 - 8\ln(x) = +\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = +\infty$

2. On admet que, pour tout $x > 0$, $f(x) = x^2\left(1 - 8\dfrac{\ln(x)}{x^2}\right)$.

   En déduire la limite : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

Solution :

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^2} = 0 \text{ par croissance comparée} \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = 1 \\ \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty\end{array}\right\}$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(1 - \dfrac{\ln(x)}{x^2}\right) = +\infty$

soit $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3. Montrer que, pour tout réel x de $]0\ ;\ +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x}$.

Solution :

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et

$f'(x) = 2x - 8 \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2 - 8}{x} = \dfrac{2\left(x^2 - 4\right)}{x} = \dfrac{2(x-2)(x+2)}{x}$

4. Étudier les variations de f sur $]0\ ;\ +\infty[$ et dresser son tableau de variations complet.

   On précisera la valeur exacte du minimum de f sur $]0\ ;\ +\infty[$.

Solution :

Les deux racines du polynômes $x^2 - 4$ sont -2 et 2, donc sur $]0\ ;\ +\infty[$ on a :

x	0		2		$+\infty$
x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	$4 - 8\ln(2)$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Démontrer que, sur l'intervalle $]0\,;\,2]$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de α).

Solution :

La fonction f est dérivable sur $]0\ ;\ +\infty[$ donc continue sur cet intervalle, donc continue sur $]0\ ;\ 2[$.
Sur l'intervalle $]0\ ;\ 2[$, la fonction f est continue et strictement décroissante ; elle passe d'une valeur positive à une valeur négative (car $4 - 8\ln(2) < 0$) donc, d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans $]0\ ;\ 2[$. On l'appelle α.

6. On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β (on ne cherchera pas à déterminer la valeur de β).

   En déduire le signe de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Solution :

On admet que, sur l'intervalle $[2\ ;\ +\infty[$, l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique β.
On a donc :

- Sur $]0;\alpha[$, $f(x) > 0$.
- $f(\alpha) = 0$
- Sur $]\alpha, \beta[$, $f(x) < 0$.
- $f(\beta) = 0$
- Sur $]\beta, +\infty[$, $f(x) > 0$.

7. Pour tout nombre réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k.$$

   En s'aidant du tableau de variations de f, déterminer la plus petite valeur de k pour laquelle la fonction g_k est positive sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

Solution :

Pour tout réel k, on considère la fonction g_k définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par : $g_k(x) = x^2 - 8\ln(x) + k$; donc $g_k(x) = f(x) + k$.

La fonction g_k a donc les mêmes variations que f et elle a donc pour minimum sur $]0\ ,\ +\infty[$ le nombre $4 - 8\ln(2) + k$. Pour que g_k soit positive ou nulle, il faut que ce minimum soit positif ou nul, donc $4 - 8\ln(2) + k \geqslant 0$ soit $k \geqslant 8\ln(2) - 4$.

Donc $8\ln(2) - 4$ est la plus petite valeur de k telle que $g_k \geqslant 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$.