DS 7

Devoir sur table

(2 heures)

Nom :........................
Prénom :........................

Exercice 1 : (12 points)
Soit f la fonction définie sur $\mathscr{D} =]-\infty;4[\cup]4;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x^2-4x+4}{x-4}$$

On note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative.

Partie A : Étude des limites.

1. Déterminer les limites de la fonction au voisinage de 4.

Tableau de signe de $x-4$:

x	$-\infty$ $\cdots$ $+\infty$
$x-4$	

Solution :

(0.5 point)

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

- Pour $x<4$:

Solution :

(0.5 point)
Pour le numérateur :
$\lim\limits_{x\to 4} x^2-4x+4 = 4$
Pour le dénominateur,d'après le tableau de signe :
$\lim\limits_{x\to 4^-} x-4 = 0^-$
Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to 4^-} f(x) = -\infty$$

- Pour $x>4$:

Solution :

(0.5 point)
Pour le numérateur :
$\lim\limits_{x\to 4} x^2-4x+4=4$
Pour le dénominateur,d'après le tableau de signe :
$\lim\limits_{x\to 4^+} x-4=0^+$
Donc, par quotient :

$$\lim_{x\to 4^+} f(x)=+\infty$$

2. Déterminer la limite de la fonction au voisinage de $+\infty$.

Solution :

(1.5 points)
On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée.
Il faut donc transformer l'expression de la fonction :
$\frac{x^2-4x+4}{x-4}=\dfrac{x\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{x\left(1-\dfrac{4}{x}\right)}=\dfrac{x\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{1-\dfrac{4}{x}}.$
On a ainsi levé la forme indéterminée :
Le numérateur :

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} x=+\infty \\ \left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x}=0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x^2}=0\end{array}\right\}\text{ Donc par somme } \lim\limits_{x\to-\infty} 1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}=1\end{array}\right\}$$

Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)=+\infty$
Le dénominateur :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4}{x}=0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\dfrac{4}{x}=1$
Donc par quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x\left(1-\dfrac{4}{x}+\dfrac{4}{x^2}\right)}{1-\dfrac{4}{x}}=+\infty$

On admet que la limite en $-\infty$ est $-\infty$.

Partie B : Étude des variations.

On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathscr{D}$

1. Montrer que, pour tout $x \in \mathscr{D}$:

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}$$

Solution :

(1 point)

La fonction $f(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x - 4}$ est un quotient, donc on utilise la règle du quotient pour dériver :

$$f'(x) = \frac{(2x-4))(x-4) - (x^2 - 4x + 4)}{(x-4)^2}.$$

Simplifions le numérateur :

$$f'(x) = \frac{2x^2 - 8x - 4x + 16 - x^2 + 4x - 4}{(x-4)^2}.$$

Cela donne :

$$f'(x) = \frac{x^2 - 8x + 12}{(x-4)^2}.$$

2. On note $p(x) = x^2 - 8x + 12$. Déterminer les racines du polynôme p :

Solution :

(1 point)

Pour déterminer les racines de $p(x) = x^2 - 8x + 12$, on résout l'équation $p(x) = 0$:

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

En utilisant la formule du discriminant :

$$\Delta = (-8)^2 - 4 \times 1 \times 12 = 64 - 48 = 16.$$

Les racines sont :

$$\begin{cases} x_1 & = & \dfrac{-(-8) + \sqrt{16}}{2 \times 1} \\ x_2 & = & \dfrac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 1} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} x_1 & = & 6 \\ x_2 & = & 2 \end{cases}$$

Ainsi, les racines sont $x = 6$ et $x = 2$.

3. Compléter le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$		$\dots$		$\dots$		$\dots$		$+\infty$
$f'(x)$			0		$\Vert$		0		
f					$\Vert$				

Solution :

(2 points)
On a :

- $f(2)=0$
- $f(6)=8$

x	$-\infty$		2		4		6		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	8	$\nearrow$	$+\infty$

Partie C : Asymptote oblique, asymptote verticale

On admet la propriété suivante :

Propriété 1 :

Pour f une fonction définie sur un voisinage de $+\infty$.
Soit Δ la droite d'équation $y = ax + b$ ($a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$).
Si on a :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

Alors la droite Δ est asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ à la courbe représentative de la fonction f.
On dispose de la même propriété au voisinage de $-\infty$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathscr{D}$:

$$f(x) - x = \frac{4}{x - 4}$$

Solution :

(0.5 point)
$x \in \mathscr{D}$:

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} - x \\ &= \frac{x^2 - 4x + 4}{x - 4} - \frac{x(x - 4)}{x - 4} \\ &= \frac{x^2 - 4x + 4 - x^2 + 4x}{x - 4} \\ &= \frac{4}{x - 4} \end{aligned}$$

2. Montrer que la droite Δ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$.

Solution :

(1 point)
On a montré que $f(x) - x = \dfrac{4}{x - 4}$.
On a $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 4 = +\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4}{x - 4} = 0$ donc

$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x) = 0.$$

Cela prouve que la droite $y = x$ est une asymptote oblique à la courbe.

On admet que la droite Δ d'équation $y = x$ est aussi une asymptote oblique au voisinage de $-\infty$.

3. Justifier que la courbe $\mathscr{C}$ admet aussi une asymptote verticale dont on donnera une équation.

Solution :

(0.5 point)

Sachant que $\lim\limits_{x\to 4^-} = -\infty$, et que $\lim\limits_{x\to 4^+} = +\infty$, donc la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote verticale d'équation $x = 4$.

Partie D : La courbe $\mathscr{C}$

1. Compléter le tableau de valeurs suivant (les valeurs seront arrondies au dixième) :

x	-6	-4	-2	0	2	3	5	6	8	10	12	14
$f(x)$												

Solution :

(0.5 point)

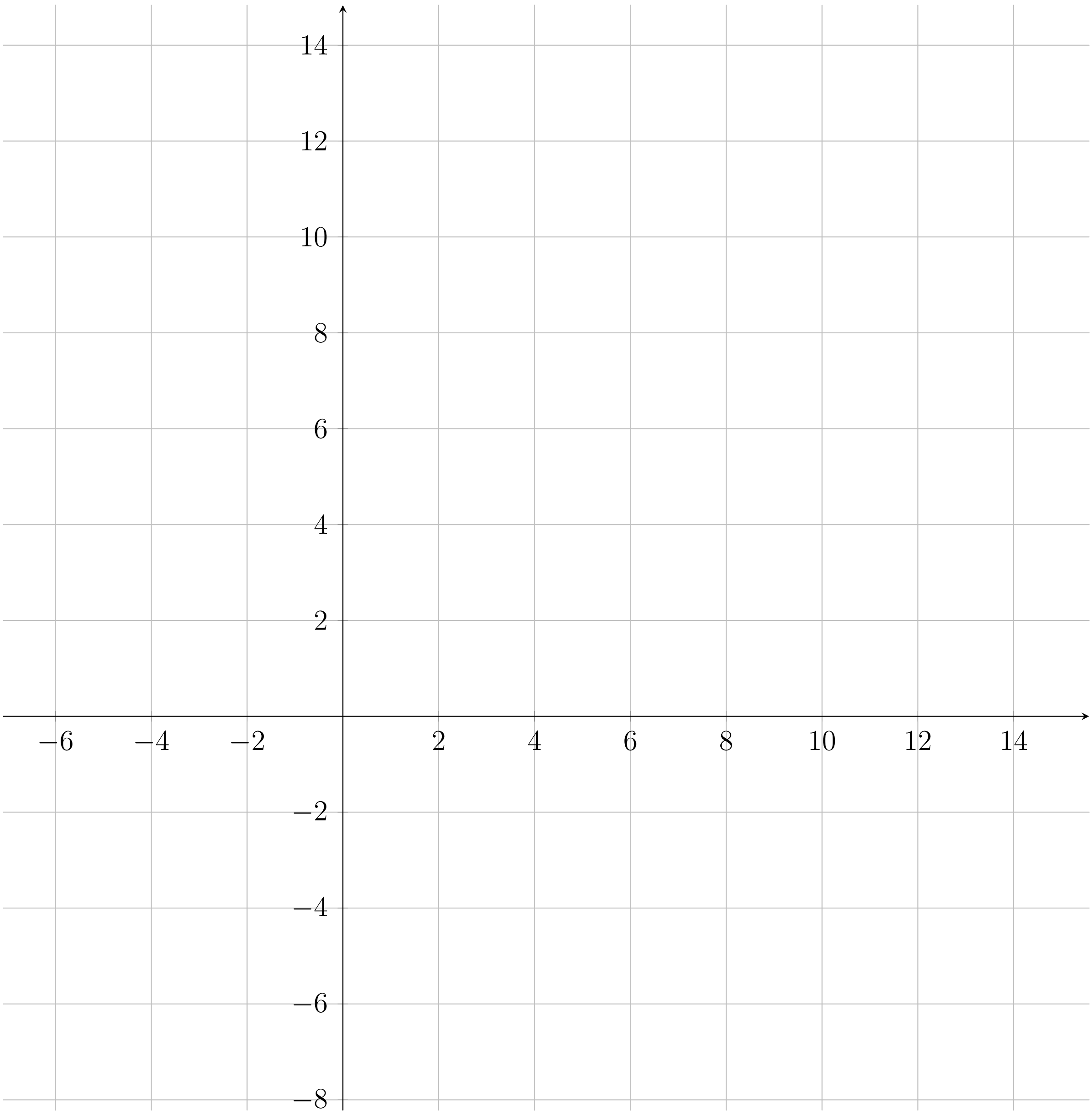
x	-6	-4	-2	0	2	3	5	6	8	10	12	14
$f(x)$	-6.4	-4.5	-2.7	-1.0	0.0	-1.0	9.0	8.0	9.0	10.7	12.5	14.4

2. Justifier que l'axe des abscisses est tangent à la courbe.

Solution :

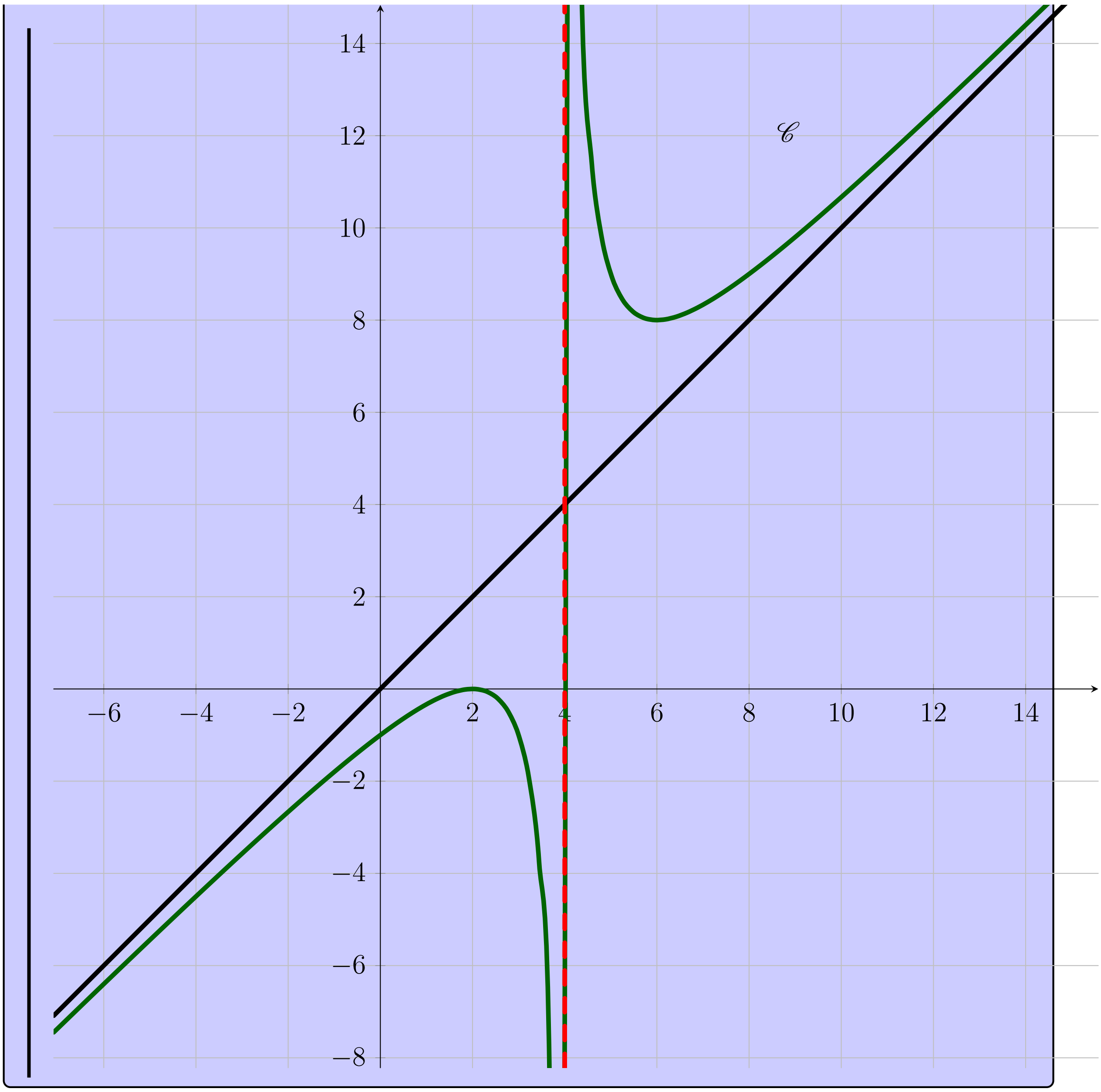
(0.5 point)
En 2, on a $f'(2) = f(2) = 0$. Donc la tangente en 2 est $y = f'(2)(x-2) + f(2) = 0$.
Ce qui correspond bien à l'axe des abscisses.

3. Tracer l'asymptote verticale, la droite Δ, les tangentes horizontales puis la courbe $\mathscr{C}$.



Solution :

(2 points)


14
12
10
8
6
4
2
−2
−4
−6
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
$\mathscr{C}$

Exercice 2 : (2 points)
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{3x-2}{2x+e^x}$$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée. Il faut donc transformer l'expression de la fonction :

$$\frac{3x-2}{2x+e^x} = \frac{x\left(3-\dfrac{2}{x}\right)}{x\left(2+\dfrac{e^x}{x}\right)} = \frac{3-\dfrac{2}{x}}{2+\dfrac{e^x}{x}}.$$

On a ainsi levé la forme indéterminée :
Le numérateur :

$\left.\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{2}{x} = 0\right\}$ Donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} 3-\frac{2}{x} = 3$

Le dénominateur :

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$, donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0$

Donc par somme $\lim\limits_{x\to-\infty} 2+\frac{e^x}{x} = 2.$

Donc par quotient $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3-\frac{2}{x}}{2+\frac{e^x}{x}} = \frac{3}{2}$

Exercice 3 : (2 points)
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to-\infty} (3x+1)e^{x^2}$$

Solution :

On a $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, donc, par composition, $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x^2} = +\infty$.
De plus $\lim\limits_{x\to-\infty} 3x+1 = -\infty$.

Donc par produit $\lim\limits_{x\to-\infty} (3x+1)e^{x^2} = -\infty$

Exercice 4 : (2 points)
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} 3x^2 - 2e^x$$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée. Il faut donc transformer l'expression de la fonction :
$3x^2 - 2e^x = e^x\left(\dfrac{3x^2}{e^x} - 2\right)$.
On a ainsi levé la forme indéterminée, en effet, d'après la croissance comparée :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{e^x} - 2 = -2$
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
Donc par produit $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(\dfrac{3x^2}{e^x} - 2\right) = -\infty$

Exercice 5 : (2 points)
Déterminer la limite suivante :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3e^x - 2x + 5}{2x+1}$$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée. Il faut donc transformer l'expression de la fonction :

$$\frac{3e^x - 2x + 5}{2x+1} = \frac{e^3\left(3 - \dfrac{2x}{e^x} + \dfrac{5}{e^x}\right)}{x\left(2 + \dfrac{1}{x}\right)} = \frac{e^x}{x} \times \frac{3 - \dfrac{2x}{e^x} + \dfrac{5}{e^x}}{2 + \dfrac{1}{x}}.$$

On a ainsi levé la forme indéterminée, en effet, d'après la croissance comparée :
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$
donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{5}{e^x} = 0$, donc par somme $\lim\limits_{x\to+\infty} 3 - \dfrac{2x}{e^x} + \dfrac{5}{e^x} = 3$
De plus $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 + \dfrac{1}{x} = 2$

Donc par produit et quotient $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x} \times \dfrac{3 - \dfrac{2x}{e^x} + \dfrac{5}{e^x}}{2 + \dfrac{1}{x}} = +\infty$