DS 6

Devoir sur table

Exercice 1 : (10 points)

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n.

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2.

Solution :

(1 point)

$$u_1 = \frac{-u_0 - 4}{u_0 + 3} = \frac{-0 - 4}{0 + 3} = -\frac{4}{3}$$

$$u_2 = \frac{-u_1 - 4}{u_1 + 3} = \frac{\frac{4}{3} - 4}{-\frac{4}{3} + 3} = -\frac{8}{5}$$

2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :
    u = ...
    for i in range(n):
        u = ...
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range (n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n, l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n.

Solution :

(0.5 point)

```
def terme (n) :
    u = 0
    for i in range(n):
        u = (-u-4)/(u+3)
    return(u)
```

3. Soit la fonction f définie sur $]-3\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x-4}{x+3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n, on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

Solution :

(1 point)

Sur $]-3\ ;\ +\infty[$, la fonction f est continue et dérivable comme quotient de fonctions continues et dérivables sur $]-3\ ;\ +\infty[$, dont le dénominateur ne s'annule jamais.

On a ainsi, $\forall x \in]-3\ ;\ +\infty[$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{-1(x+3)-1(x-4)}{(x+3)^2} \\ &= \frac{1}{(x+3)^2} \end{aligned}$$

On a donc une dérivée strictement positive sur $]-3\ ;\ +\infty[$, donc la fonction est strictement croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$$

Solution :

(2 points)

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{''} -2 < u_{n+1} \leqslant u_n \text{''}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 0$ et $u_1 = -\dfrac{4}{3}$. On a donc bien

  $$-2 < u_1 \leqslant u_0$$

  Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $-2 < u_{n+1} \leqslant u_n$ (**Hypothèse de récurrence**).

  On a donc, sachant que la fonction f est croissante sur $]-3\ ;\ +\infty[$:

  $$\begin{aligned} & f(-2) < f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n) \\ \Rightarrow\ & -2 < u_{n+2} \leqslant u_{n+1} \end{aligned}$$

  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Solution :

(1 point)

D'après la question précédente, la suite (u_n) est décroissante (car $u_{n+1} \leqslant u_n$) et minorée par -2. Donc d'après le théorème de convergence monotone, la suite est convergente.

6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

(a) Donner v_0.

Solution :

(0.5 point)

On a $v_0 = \dfrac{1}{u_0 + 2} = \dfrac{1}{2}$.

(b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.

Solution :

(2 points)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{1}{\dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3} + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{1}{\dfrac{-u_n - 4}{u_n + 3} + \dfrac{2u_n + 6}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{1}{\dfrac{u_n + 2}{u_n + 3}} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{u_n + 3}{u_n + 2} - \frac{1}{u_n + 2} \\
&= \frac{u_n + 2}{u_n + 2} \\
&= 1
\end{aligned}$$

La suite (v_n) est donc bien arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \dfrac{1}{2}$.

(c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$:

$$u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2$$

Solution :

(1.5 points)

Sachant que (v_n) est arithmétique de raison 1 et de premier terme $v_0 = \frac{1}{2}$, on a donc :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad , \quad v_n = v_0 + nR = \frac{1}{2} + n$$

De plus :

$$\begin{aligned} v_n = \frac{1}{u_n+2} \quad & \Leftrightarrow \quad n + \frac{1}{2} = \frac{1}{u_n+2} \\ & \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+0,5} = u_n + 2 \\ & \Leftrightarrow \quad u_n = \frac{1}{n+0,5} - 2 \end{aligned}$$

(d) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Solution :

(0.5 point)

On a $\lim\limits_{n\to+\infty} n + 0.5 = +\infty$ donc par inverse $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+0,5} = 0$

Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -2$.

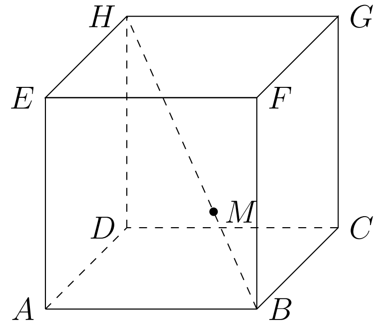
Exercice 2 : (10 points)

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On munit l'espace du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B, D, E, G et H.

Solution :

(1 point)

On a :

- $A(0,0,0)$
- $B(1,0,0)$
- $D(0,1,0)$
- $E(0,0,1)$
- $G(1,1,1)$
- $H(0,1,1)$

2. (a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.

Solution :

(1.5 point)

On peut calculer toutes les distances EG, ED et DG :

- $EG = \sqrt{(1-0)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}$
- $ED = \sqrt{(0-0)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}$
- $DG = \sqrt{(1-0)^2 + (1-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{2}$

On aurai aussi pu constater que chaque segment est la diagonale d'un carré de coté 1, donc sa mesure est bien de $\sqrt{2}$...

Donc le triangle est un triangle équilatéral.

(b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Solution :

(0.5 point)

Du fait du caractère équilatéral du triangle EGD de côté $\sqrt{2}$, on a :

$\mathcal{A}_{EGD} = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{2}^2 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

Solution :

(1 point)

On a $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$, avec $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\frac{1}{3}\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}\end{pmatrix}$.

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_M - x_B &=& -\frac{1}{3}\\ y_M - y_B &=& \frac{1}{3}\\ z_M - z_B &=& \frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_M - 1 &=& -\frac{1}{3}\\ y_M - 0 &=& \frac{1}{3}\\ z_M - 0 &=& \frac{1}{3}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_M &=& \frac{2}{3}\\ y_M &=& \frac{1}{3}\\ z_M &=& \frac{1}{3}\end{array}\right.$$

On a donc bien $M\left(\frac{2}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\ ;\ \frac{1}{3}\right)$.

4. (a) Justifier que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD).

Solution :

(1.5 point)

On a $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{ED}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$. Les vecteurs sont clairement non colinéaires (la lecture des abscisses suffisent...). Donc pour montrer que le vecteurs $\vec{n}$ est normal au plan, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à ces deux vecteurs :

- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{EG} = (-1) \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 = -1 + 1 = 0$. Donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{EG}$.
- $\vec{n} \cdot \overrightarrow{ED} = (-1) \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) = 1 - 1 = 0$. Donc $\vec{n} \perp \overrightarrow{ED}$.

Donc $\vec{n}$ est normal au plan (EGD).

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

Solution :

(1 point)

On dispose du vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc on a :

(EGD) : $-x + y + z + d = 0$. Sachant que $E \in (EGD)$, on a donc $-0 + 0 + 1 + d = 0 \Leftrightarrow d = -1$. Donc une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

(c) Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M.
Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - t \\ y = \dfrac{1}{3} + t \\ z = \dfrac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Solution :

(1 point)

La droite $\mathcal{D}$ a pour vecteur directeur $\vec{n}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et passe par le point $M\left(\dfrac{2}{3} ; \dfrac{1}{3} ; \dfrac{1}{3}\right)$.

On a donc :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = x_M + x_{\vec{n}}t \\ y = y_M + y_{\vec{n}}t \\ z = z_M + z_{\vec{n}}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

soit

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} - t \\ y = \dfrac{1}{3} + t \\ z = \dfrac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

5. Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide $GEDM$.

   (a) Soit K, le pied de la hauteur de la pyramide $GEDM$ issue du point M.

   Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

Solution :

(1.5 point)

$K \in \mathcal{D} \cap (EGD)$, donc les coordonnées de K vérifient la représentation paramétrique de $\mathcal{D}$ et l'équation cartésienne du plan. Donc :

$-(\dfrac{2}{3} - t) + \dfrac{1}{3} + t + \dfrac{1}{3} + t - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 1 \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{3}$

Donc $\begin{cases} x_K = \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{3} \\ y_K = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \\ z_K = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_K = \dfrac{1}{3} \\ y_K = \dfrac{2}{3} \\ z_K = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

Soit $K\left(\dfrac{1}{3} ; \dfrac{2}{3} ; \dfrac{2}{3}\right)$.

(b) En déduire le volume de la pyramide $GEDM$.

Solution :

(1 point)

Nous disposons déjà de l'aire de la base :$\mathcal{A}_{EGD} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Il nous manque la hauteur MK :

$$MK = \sqrt{\left(\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{3}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{9}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Le volume de la pyramide est donc :

$$\mathcal{V} = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{3} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}}{3} = \frac{1}{6}$$