

DS 6

Devoir sur table

Exercice 1 : (10 points)

On considère la suite (u_n) telle que $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n :

$$u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{u_n + 3}$$

On admet que u_n est défini pour tout entier naturel n .

1. Calculer les valeurs exactes de u_1 et u_2 .
2. On considère la fonction `terme` ci-dessous écrite de manière incomplète en langage Python :

```
def terme (n) :  
    u = ...  
    for i in range(n):  
        u = ...  
    return(u)
```

On rappelle qu'en langage Python, « `i in range(n)` » signifie que i varie de 0 à $n - 1$.

Recopier et compléter le cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction `terme (n)` renvoie la valeur de u_n .

3. Soit la fonction f définie sur $] -3 ; +\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{-x - 4}{x + 3}.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$.

Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur $] -3 ; +\infty[$.

4. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n :

$$-2 < u_{n+1} \leq u_n$$

5. En déduire que la suite (u_n) est convergente.
6. Soit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$v_n = \frac{1}{u_n + 2}$$

- (a) Donner v_0 .
- (b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1.
- (c) En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$:

$$u_n = \frac{1}{n + 0,5} - 2$$

- (d) Déterminer la limite de la suite (u_n) .

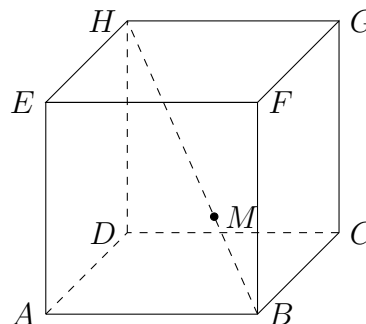
Exercice 2 : (10 points)

Dans l'espace, on considère le cube $ABCDEFGH$ d'arête de longueur égale à 1.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On munit l'espace du repère orthonormé $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

On considère le point M tel que $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.



1. Par lecture graphique, donner les coordonnées des points B , D , E , G et H .
2. (a) Quelle est la nature du triangle EGD ? Justifier la réponse.
- (b) On admet que l'aire d'un triangle équilatéral de côté c est égale à $\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$.

Montrer que l'aire du triangle EGD est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

3. Démontrer que les coordonnées de M sont $\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right)$.

4. (a) Justifier que le vecteur $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (EGD) .

(b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan (EGD) est : $-x + y + z - 1 = 0$.

(c) Soit $\mathcal{D}$ la droite orthogonale au plan (EGD) et passant par le point M .

Montrer qu'une représentation paramétrique de cette droite est :

$$\mathcal{D} : \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

5. Le but de cette question est de calculer le volume de la pyramide $GEDM$.

(a) Soit K , le pied de la hauteur de la pyramide $GEDM$ issue du point M .

Démontrer que les coordonnées du point K sont $\left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

(b) En déduire le volume de la pyramide $GEDM$.

