DS 5

Devoir sur table

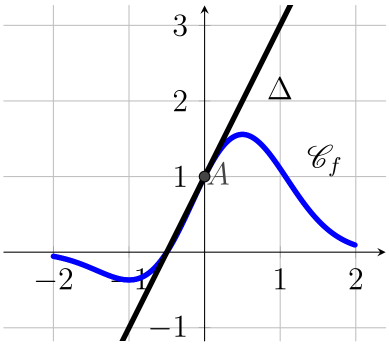
Exercice 1 : (3 points)

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_f = [-2\ ;\ 2]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x^2},$$

où a et b sont des nombres réels.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



On admet que la courbe passe par le point $A(0,1)$, et que la tangente à la courbe en A a pour équation :

$$\Delta : y = 2x+1$$

1. Déterminer, en le justifiant, la valeur de $f(0)$.

Solution :

(0.5 point)
La courbe passe par $A(0,1)$, donc :

$$f(0) = 1.$$

2. En déduire la valeur de b.

Solution :

(0.5 point)
On a $f(x) = (ax+b)e^{-x^2}$. Pour $x=0$, $f(0) = be^0 = b$, donc :

$$b = 1.$$

3. Déterminer, en le justifiant, la valeur de $f'(0)$.

Solution :

(1 point)
La tangente en A a pour équation $y = 2x+1$, donc le coefficient directeur est donné par :

$$f'(0) = 2.$$

4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et que , $\forall x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = (-2ax^2 - 2x + a)e^{-x^2}$$

En déduire la valeur de a.

Solution :

(1 point)
On utilise la dérivée :

$$f'(x) = (-2ax^2 - 2x + a)e^{-x^2}.$$

En évaluant à $x = 0$, $f'(0) = a \cdot e^0 = a$. Sachant $f'(0) = 2$, on obtient :

$$a = 2.$$

Exercice 2 : (4 points)
On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_f = [-2\ ;\ 2]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x^2},$$

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Montrer que , $\forall x \in \mathcal{D}_f$.

$$f'(x) = (-4x^2 - 2x + 2)e^{-x^2}$$

Solution :

(1.5 points)
On calcule la dérivée de $f(x) = (2x+1)e^{-x^2}$ par la règle du produit :

$$f'(x) = 2e^{-x^2} + (2x+1) \cdot (-2x)e^{-x^2} = (-4x^2 - 2x + 2)e^{-x^2}.$$

2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$.

Solution :

(2.5 points)
On étudie le signe du polynôme : $p(x) = -4x^2 - 2x + 2$:
On a : $\Delta = 36$. on trouve deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = \dfrac{1}{2}$.
En appliquant la règle du "signe de a à l'extérieur des racines " :

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$		2
$p(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
e^{-x^2}		$+$		$+$		$+$	
f	$-3e^{-4}$	$\searrow$	$-e^{-1}$	$\nearrow$	$2e^{-\frac{1}{4}}$	$\searrow$	$5e^{-4}$

Exercice 3 : (6 points)

On considère une fonction f, définie et continue sur $[-2,2]$, dont on donne le tableau de variation :

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$		2
f	-0.1	$\searrow$	-0.4	$\nearrow$	1.6	$\searrow$	0.1

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.

Solution :

(3 points)

- Sur l'intervalle $[-2,-1]$, le maximum de la fonction est -0.1. Donc l'équation $f(x) = 1$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, la fonction est continue et strictement croissante. On a $f(-1) = -0.4$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.6$, avec $1 \in [-0.4, 1.6]$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, la fonction est continue et strictement décroissante. On a $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.6$ et $f(2) = 0.1$, avec $1 \in [0.1, 1.6]$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 1$ a une unique solution sur cet intervalle.

En conclusion, l'équation $f(x) = 1$ a deux solutions sur $[-2,2]$.

2. Déterminer le nombre d'antécédent de 2 par f.

Solution :

(1 point)
D'après le tableau de variation, sur $[-2, 2]$, le maximum de la fonction est 1.6. Donc l'équation $f(x) = 2$ n'a pas de solution. Donc 2 n'a pas d'antécédent par f.

3. Déterminer le nombre d'annulateurs de la fonction f.

Solution :

(2 points)

- Sur l'intervalle $[-2, -1]$, le maximum de la fonction est -0.1. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$, la fonction est continue et strictement croissante. On a $f(-1) = -0.4$ et $f\left(\frac{1}{2}\right) = 1.6$, avec $0 \in [-0.4, 1.6]$. Donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 0$ a une unique solution sur cet intervalle.
- Sur l'intervalle $\left[\frac{1}{2}, 2\right]$, le minimum de la fonction est 0.1. Donc l'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution sur cet intervalle.

En conclusion, l'équation $f(x) = 0$ a une seule solution sur $[-2, 2]$.

<u>Exercice 4 :</u> (7 points)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{5}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\frac{1}{2}(u_n - 4)^2 + 4$.
On note f la fonction définie sur $[2, 4]$ par $f(x) = -\frac{1}{2}(x - 4)^2 + 4$.
.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2, 4]$.

Solution :

(2 points)
La fonction est dérivable sur $[2, 4]$ car c'est un polynôme, et $\forall x \in [2, 4]$:
En utilisant la formule : $(u^2)' = 2u'u$:
$f'(x) = -\frac{1}{2} \times 2(x - 4) = -x + 4$.
La dérivée est donc une fonction affine qui s'annule en 4 :

x	2		4
$f'(x)$		$+$	0
f	2	$\nearrow$	4

2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n on a :

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

Solution :

(2 points)
Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 2.5$ et $u_1 = f(2.5) = 2.875$. On a donc bien

$$2 \leqslant u_0 \leqslant u_1 \leqslant 4$$

  Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc, sachant que la fonction f est croissante sur $[2;4]$:
  $f(2) \leqslant f(u_n) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(4)$
  $\Rightarrow \quad 2 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_{n+2} \leqslant 4$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.

Solution :

(1 point)

$$\begin{aligned} f(x) = x &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}(x-4)^2 + 4 = x \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 8 + 4 = x \\ &\Leftrightarrow -\frac{1}{2}x^2 + 3x - 4 = 0 \end{aligned}$$

On retrouve une équation du second degré :

. On a : $\Delta = 1$. on trouve deux racines : $x_1 = 2$ et $x_2 = 4$.

4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.

Solution :

(2 points)

La suite est bornée et croissante, donc elle converge, d'après le théorème de convergence monotone. De plus, la fonction f étant continue sur $[2, 4]$ (car c'est un polynôme), le théorème du point fixe permet de dire que ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.

D'après la question précédente, ℓ prend soit la valeur 2, soit la valeur 4. Mais étant donné que la suite est croissante avec $u_0 = 2.5$, seule la valeur 4 est possible.

On peut donc dire que la suite converge vers $\ell = 4$.