DS 5

Devoir sur table

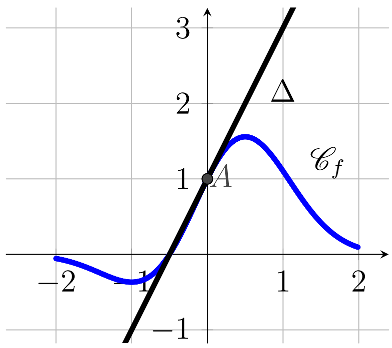
Exercice 1 : (3 points)

Soit f une fonction définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_f = [-2\ ;\ 2]$ par

$$f(x) = (ax+b)\mathrm{e}^{-x^2},$$

où a et b sont des nombres réels.

La courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction f est donnée ci-dessous :



On admet que la courbe passe par le point $A(0,1)$, et que la tangente à la courbe en A a pour équation :

$$\Delta : y = 2x+1$$

1. Déterminer, en le justifiant, la valeur de $f(0)$.
2. En déduire la valeur de b.
3. Déterminer, en le justifiant, la valeur de $f'(0)$.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$, et que , $\forall x \in \mathcal{D}_f$:

$$f'(x) = (-2ax^2 - 2x + a)e^{-x^2}$$

En déduire la valeur de a.

Exercice 2 : (4 points)

On considère la fonction f définie sur l'ensemble $\mathcal{D}_f = [-2\ ;\ 2]$ par

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x^2},$$

1. On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$. Montrer que , $\forall x \in \mathcal{D}_f$.

$$f'(x) = (-4x^2 - 2x + 2)e^{-x^2}$$

2. Déterminer le tableau de variation de f sur $\mathcal{D}_f$.

Exercice 3 : (6 points)

On considère une fonction f, définie et continue sur $[-2, 2]$, dont on donne le tableau de variation :

x	-2		-1		$\frac{1}{2}$		2
f	-0.1	$\searrow$	-0.4	$\nearrow$	1.6	$\searrow$	0.1

1. Déterminer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 1$.
2. Déterminer le nombre d'antécédent de 2 par f.
3. Déterminer le nombre d'annulateurs de la fonction f.

Exercice 4 : (7 points)

On considère une suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{5}{2}$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = -\dfrac{1}{2}(u_n - 4)^2 + 4$.
On note f la fonction définie sur $[2, 4]$ par $f(x) = -\dfrac{1}{2}(x - 4)^2 + 4$.
.

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[2, 4]$.
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier n on a :

$$2 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 4$$

3. Résoudre l'équation $f(x) = x$.
4. Montrer que la suite (u_n) converge et déterminer sa limite ℓ.