DS 3

Devoir sur table

Exercice 1 : (8 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{2u_n+3} \end{cases}$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite.

Solution :

(1 point)

$u_0 = 1$, $u_1 = \dfrac{3u_0}{2u_0+3} = \dfrac{3\times 1}{2\times 1+3} = \dfrac{3}{5}$, $u_2 = \dfrac{3u_1}{2u_1+3} = \dfrac{3}{7}$,$u_3 = \dfrac{3u_2}{2u_2+3} = \dfrac{1}{3}$, $u_4 = \dfrac{3u_3}{2u_3+3} = \dfrac{3}{11}$.

2. Démontrer par récurrence que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$$

Solution :

(2 points)

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{"} u_n > 0 \text{"}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 1$ et $1 > 0$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n > 0$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :
  $$\begin{aligned} u_n > 0 &\Rightarrow 3u_n > 0 \text{ et } 2u_n + 3 > 0 \\ &\Rightarrow \frac{3u_n}{2u_n+3} > 0 \\ &\Rightarrow u_{n+1} > 0 \end{aligned}$$
  Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

3. On suppose que la suite ne s'annule jamais. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = \frac{1}{u_n}$$

a Calculer les 5 premiers termes de la suite (v_n).

Solution :

(1 point)

$v_0 = \frac{1}{u_0} = \frac{1}{1} = 1$, $v_1 = \frac{1}{u_1} = \frac{5}{3}$, $v_2 = \frac{1}{u_2} = \frac{7}{3}$,$v_3 = \frac{1}{u_3} = 2$, $v_4 = \frac{1}{u_4} = \frac{11}{3}$.

b Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $R = \frac{2}{3}$.

Solution :

(2 points)

On a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{1}{\frac{3u_n}{2u_n+3}} - \frac{1}{u_n} \\ &= \frac{3+2u_n}{3u_n} - \frac{3}{3u_n} . \\ &= \frac{3+2u_n-3}{3u_n} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Donc, la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $R = \frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = 1$.

4. Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$u_n = \frac{3}{2n+3}$$

Solution :

(2 points)

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : "u_n = \frac{3}{2n+3}"$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $u_0 = 1$ et $\frac{3}{2\times 0+3} = 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit $u_n = \frac{3}{2n+3}$ (**Hypothèse de récurrence**).
  On a donc :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \frac{3u_n}{2u_n+3} \\ &= \frac{3\dfrac{3}{2n+3}}{2\dfrac{3}{2n+3}+3} \\ &= \frac{9}{6+6n+9} \\ &= \frac{3}{2n+5} \\ &= \frac{3}{2(n+1)+3} \end{aligned}$$

Donc on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 2 : (4 points)

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

(a) $u_n = -3n^2 + 7$

Solution :

(1 point)

$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = +\infty \\ \lim\limits_{n\to+\infty} 7 = 7 \end{array}\right\}$ Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} -3n^2 + 7 = -\infty$

(b) $u_n = (5n+3)(2n^2-4)$

Solution :

(1 point)

- $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 = 3$, donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n+3 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2 = \infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} -4 = -4$ donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 2n^2 - 4 = +\infty$

Donc par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} (5n+3)(2n^2-4) = +\infty$

(c) $u_n = \dfrac{5n+1}{3+\dfrac{2}{n}}$

Solution :

(1 point)

- $\lim\limits_{n\to+\infty} 5n+1 = +\infty$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2}{n} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 3 + \dfrac{2}{n} = 3$.

Donc par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5n+1}{3+\dfrac{2}{n}} = +\infty$

(d) $u_n = 8 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{5}{n^2}$

Solution :

(1 point)

- $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{5}{n^2} = 0$

Donc par somme : $\lim\limits_{n\to+\infty} 8 + \dfrac{1}{\sqrt{n}} - \dfrac{5}{n^2} = 8$

Exercice 3 : (4 points)

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

(a) $u_n = 2n^3 - 5n^2 + 1$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (somme d'infinis de signes différents...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$u_n = 2n^3 - 5n^2 + 1 = n^3\left(2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right)$.

On a ainsi levé la forme indéterminée :

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} n^3 = +\infty \\ \left.\begin{array}{l} \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5}{n} = 0 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n^3} = 0 \end{array}\right\} \text{Donc par somme } \lim\limits_{n\to+\infty} 2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^3} = 2 \end{array}\right\}$$

Donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n^3\left(2 - \dfrac{5}{n} + \dfrac{1}{n^3}\right) = +\infty$

(b) $u_n = \dfrac{5n-7}{3n^2-4}$

Solution :

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (quotient d'infinis ...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$$u_n = \frac{5n-7}{3n^2-4} = \frac{n\left(5 - \dfrac{7}{n}\right)}{n^2\left(3 - \dfrac{4}{n^2}\right)} = \frac{5 - \dfrac{7}{n}}{n\left(3 - \dfrac{4}{n^2}\right)}.$$

On a ainsi levé la forme indéterminée :

$\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{7}{n} = 0$ Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} 5 - \frac{7}{n} = 5$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{n\to+\infty} 3 - \frac{4}{n^2} = 3 \\ \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty\end{array}\right\}$

Donc par produit $\lim\limits_{n\to+\infty} n\left(3 - \frac{4}{n^2}\right) = +\infty$

Donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{5 - \frac{7}{n}}{n\left(3 - \frac{4}{n^2}\right)} = 0$

Exercice 4 : (4 points)

Déterminer la limite des suites dont on donne le terme général :

(a) $u_n = 3^{n+2} - 2^n$

Solution :

(2 points)

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (différence d'infinis ...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$u_n = 3^{n+2} - 2^n = 3^n\left(3^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right)$ Sachant que $-1 < \frac{2}{3} < 1$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$. Donc par somme

$\lim\limits_{n\to+\infty} 3^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n = 9$, et enfin par produit : $\lim\limits_{n\to+\infty} 3^n\left(3^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = +\infty$

(b) $u_n = \dfrac{3 - 5^n}{2 \times 5^{n-1} + 1}$

Solution :

(2 points)

On constante que les opérations sur les limites conduisent à une forme indéterminée (quotient d'infinis ...) Il faut donc transformer le terme général de la suite :

$$\begin{aligned} u_n &= \frac{3 - 5^n}{2 \times 5^{n-1} + 1} \\ &= \frac{5^n\left(\frac{3}{5^n} - 1\right)}{5^n\left(2 \times 5^{-1} + \frac{1}{5^n}\right)} \\ &= \frac{\frac{3}{5^n} - 1}{\frac{2}{5} + \frac{1}{5^n}} \end{aligned}$$

Sachant que $1 < 5$, on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 5^n = +\infty$, on a donc par quotient $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{5^n} = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{5^n} = 0$. Donc par somme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{3}{5^n} - 1 = -1$, et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{5} + \frac{1}{5^n} = \frac{2}{5}$ enfin par quotient : $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\dfrac{3}{5^n}-1}{\dfrac{2}{5}+\dfrac{1}{5^n}} = \dfrac{-1}{\dfrac{2}{5}} = -\dfrac{5}{2}$