DS 2

Devoir sur table

Exercice 1 : (7 points)

On définie les points $A(1,4,1)$, $B\left(\frac{1}{2},-1,-1\right)$ et $C(1,1,0)$.

On considère la droite Δ dont on donne une représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+3t \\ y & = & 1 \\ z & = & 2t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}$$

1. Justifier que le point A n'appartient pas à la droite Δ .

Solution :

(1 point)

Pour que A soit sur la droite, il faudrait un paramètre t tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & 1+3t \\ 4 & = & 1 \\ 1 & = & 2t \end{array}\right.$$

La deuxième équation est impossible. Donc le point A n'appartient pas à la droite Δ .

2. Justifier que le point C appartient à la droite Δ .

Solution :

(1 point)

Pour que C soit sur la droite, il faudrait un paramètre t tel que :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & 1+t \\ 1 & = & 1 \\ 0 & = & 2t \end{array}\right.$$

Ce qui donnerai :

$$\left\{\begin{array}{lcl} t & = & 0 \\ 1 & = & 1 \\ t & = & 0 \end{array}\right.$$

Les trois équations donnent le même paramètre. Donc le point C appartient à la droite Δ .

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Solution :

(2 points)

La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{1}{2}-1 \\ -1-4 \\ -1-1 \end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$

De plus la droite passe par A, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1-\frac{1}{2}t \\ y & = & 4-5t \\ z & = & 3-2t \end{array}\right. \quad , t \in \mathbb{R}$$

4. Montrer que les droites (AB) et Δ sont sécantes, et déterminer les coordonnées du point D, intersection des deux droites.

Solution :

(3 points)

Le point d'intersection (si il existe) vérifie les deux représentations paramétriques.

On cherche donc t_1 et t_2 tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1+3t_1 & = & 1-\frac{1}{2}t_2 \\ 1 & = & 4-5t_2 \\ 2t_1 & = & 1-2t_2 \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcl} 1+3t_1 & = & 1-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5} \\ t_2 & = & \frac{3}{5} \\ 2t_1 & = & 1-2\times\frac{3}{5} \end{array}\right.$$

d'où $\left\{\begin{array}{rcl} t_1 & = & -\frac{1}{10} \\ t_2 & = & \frac{3}{5} \\ t_1 & = & -\frac{1}{10} \end{array}\right.$

Il y a donc bien intersection (car le système admet bien une solution...) pour trouver les coordonnées du point D, il suffit de remplacer les paramètres (soit dans le premier, ou dans le second... ou dans les deux, on doit trouver la même chose...) :

En remplaçant $t_1 = -\frac{1}{10}$ dans la représentation de Δ

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1+3\times\left(-\frac{1}{10}\right) \\ y & = & 1 \\ z & = & 2\times\left(-\frac{1}{10}\right) \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & \frac{7}{10} \\ y & = & 1 \\ z & = & -\frac{1}{5} \end{array}\right.$$

Le point d'intersection est donc : $D(-6, 3, -1)$.

<u>Exercice 2 :</u> (8 points)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\left\{\begin{array}{l} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + 3(n-1) \end{array}\right.$.

1. Calculer les 5 premiers termes de la suite (u_n).

Solution :

(1 point)
On a : $u_0 = 1$, $u_1 = 2u_0+3\times(-1) = -1$, $u_2 = 2u_1+3\times 0 = -2$, $u_3 = 2u_2+3\times 1 = -1$, $u_4 = 2u_3 + 3 \times 2 = 4$.

2. On pose (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :

$$v_n = u_n + 3n.$$

a Calculer les 5 premiers termes de la suite (v_n).

Solution :

(1 point)
On a : $v_0 = u_0+3\times 0 = 1$, $v_1 = u_1+3\times 1 = -1+3 = 2$, $v_2 = u_2+3\times 2 = -2+6 = 4$, $v_3 = u_3 + 3 \times 3 = -1 + 9 = 8$, $v_4 = u_4 + 3 \times 4 = 4 + 12 = 16$.

b Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

Solution :

(2 point)
On a, pour tout entier n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} + 3(n+1) \\ &= 2u_n + 3(n-1) + 3(n+1) \\ &= 2u_n + 6n \\ &= 2(u_n + 3n) \\ &= 2v_n \end{aligned}$$

On a donc bien prouvé que la suite (v_n) est géométrique de raison $q = 2$.

3. En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

Solution :

(0.5 point)
$\forall n \in \mathbb{N}$, on a $v_n = v_0 \times q^n = 2^n$

4. En déduire que l'on a la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 3n$$

Solution :

(0.5 point)
D'après la question précédente, on a, $\forall n \in \mathbb{N}$:
$v_n = u_n + 3n \Leftrightarrow u_n = v_n - 3n \Leftrightarrow u_n = 2^n - 3n$

5. Démontrer la précédente égalité par récurrence, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = 2^n - 3n$$

Solution :

(3 points)

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{"}u_n = 2^n - 3n\text{"}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** Pour $n = 0$: On a $u_0 = 1$ et $2^0 - 3 \times 0 = 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit :

$$u_n = 2^n - 3n \quad \text{H.R}$$

On a :

$$\begin{array}{rcl} u_{n+1} & = & 2u_n + 3(n-1) \\ & =_{(HR)} & 2(2^n - 3n) + 3n - 3 \\ & = & 2^{n+1} - 6n + 3n - 3 \\ & = & 2^{n+1} - 3n - 3 \\ & = & 2^{n+1} - 3(n+1) \end{array}$$

Donc, on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.

Exercice 3 : (5 points)

Montrer par récurrence l'égalité suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N} : \qquad \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2$$

Solution :

Notons $\mathcal{P}_n$ la proposition dépendant de n :

$$\mathcal{P}_n : \text{"} \sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 \text{"}$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie :

- **Initialisation :** On a $\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = 2 \times 0 + 1 = 1$ et $(0+1)^2 = 1$. Donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.
- **Hérédité :** On suppose que la propriété est vraie pour un $n > 0$ fixé. Soit :

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) = (n+1)^2 \quad \text{H.R}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(2k+1) &= \sum_{k=0}^{n} +(2(n+1)+1 \\
&=_{(HR)} (n+1)^2+2n+3 \\
&= n^2+2n+1+2n+3 \\
&= n^2+4n+4 \\
&= (n+2)^2
\end{aligned}$$

Donc, on a bien $\mathcal{P}_{n+1}$.

- **Conclusion :** D'après le principe de la démonstration par récurrence, on a donc pour tout entier n, $\mathcal{P}_n$ est vraie.