DS 1

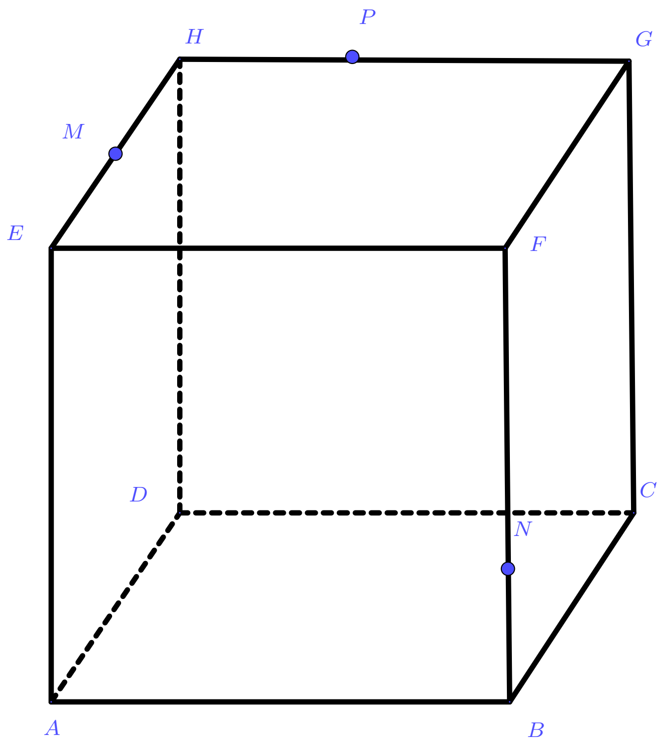
Devoir sur table

(1 heure)

Nom :........................
Prénom :........................

Exercice 1 : (5 points)

On considère un cube de coté a. On place les points M, N et P comme l'indique la figure.



1. Justifier que les droites (MP) et (FG) sont sécantes. On note K le point d'intersection.

Solution :

(1 point)
Les droites (MP) et (FG) appartiennent toutes le deux au plan (HEF) car $M \in (EH) \subset (HEF)$ et $P \in (GH) \subset (HEF)$. Elles sont donc coplanaires. De plus elle ne sont pas parallèles (car M et P sont sur deux arêtes différentes.)

Donc les droites (MP) et (FG) sont sécantes.

2. Justifier que les droites (MP) et (EF) sont sécantes. On note I le point d'intersection.

Solution :

(1 point)
Les droites (MP) et (EF) appartiennent aussi toutes le deux au plan (HEF). Elles sont donc coplanaires. De plus elle ne sont pas parallèles (car M et P sont sur deux arêtes différentes.)
Donc les droites (MP) et (EF) sont sécantes.

3. On note J l'intersection des droites (MK) et (CG).Justifier que le point J appartient à l'intersection du plan (MNP) et du plan (BCG).

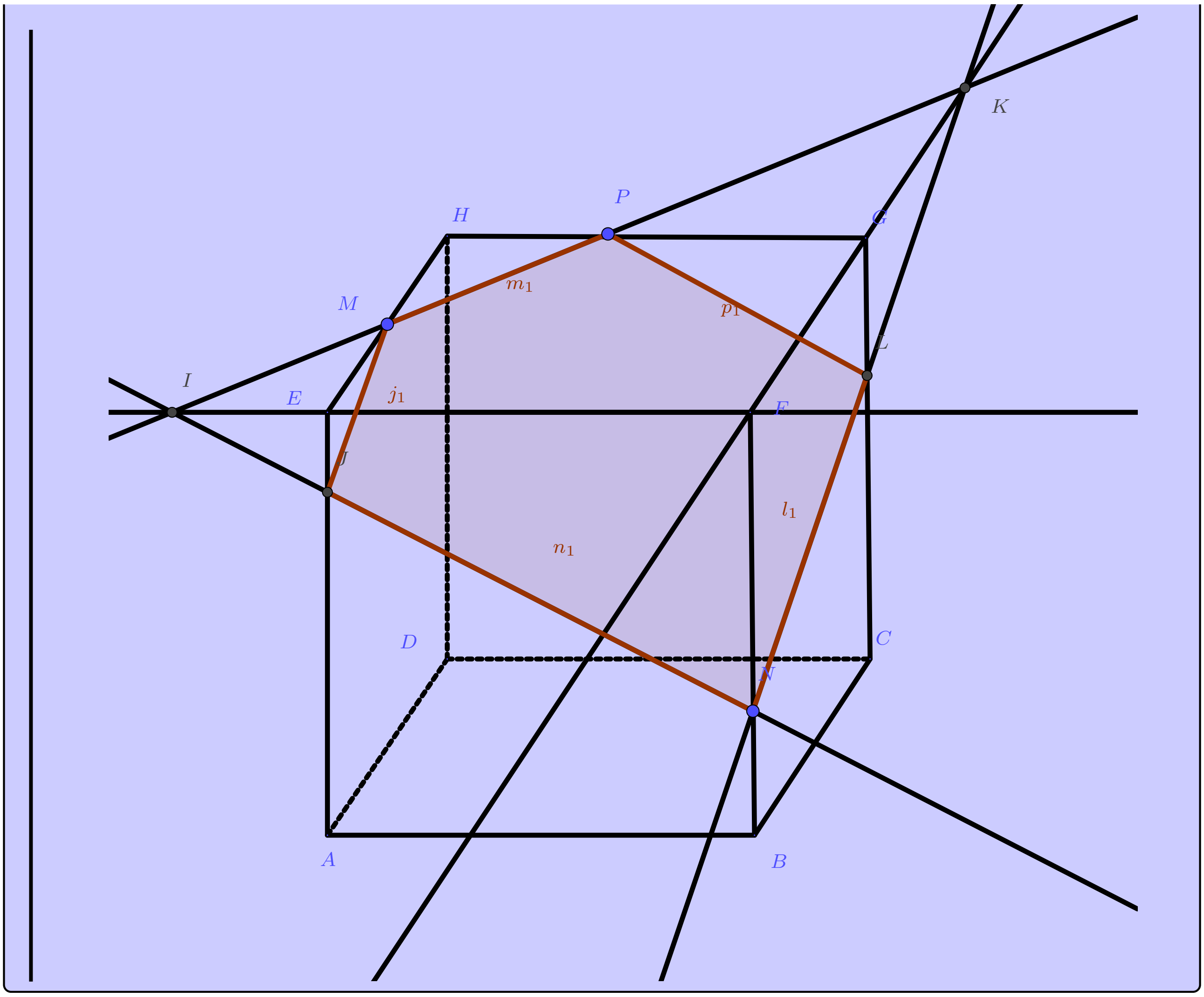
Solution :

(1.5 points)
K appartient à (CG) et MP, donc il est bien sur les deux plans, donc à l'intersection.
Le point M appartient aussi au deux plans. Donc la droite (KM) est l'intersection des deux plans.
Donc le point J appartient à l'intersection du plan (MNP) et du plan (BCG).

4. Construire la section du cube et du plan (MNP).

Solution :

(1.5 points)



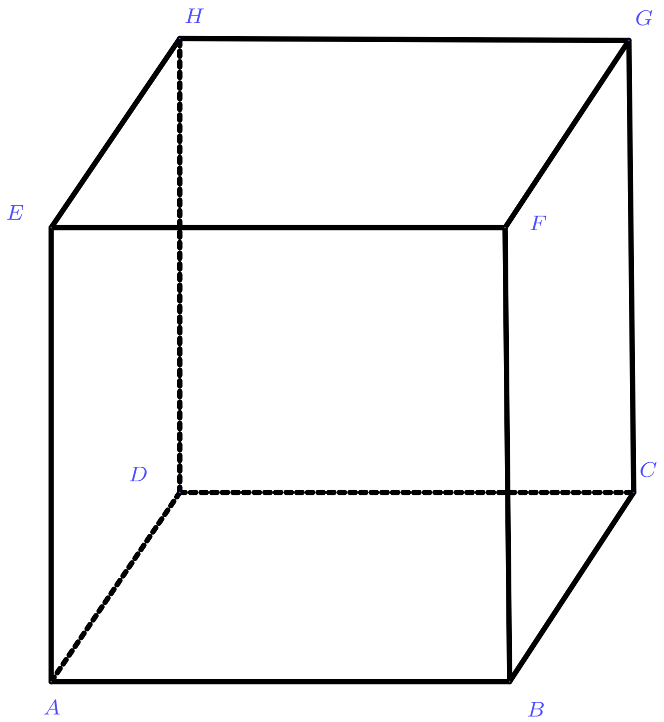
<u>Exercice 2 :</u> (7 points)

On considère le cube $ABCDEFGH$.

On note les points I, J et K définie par :

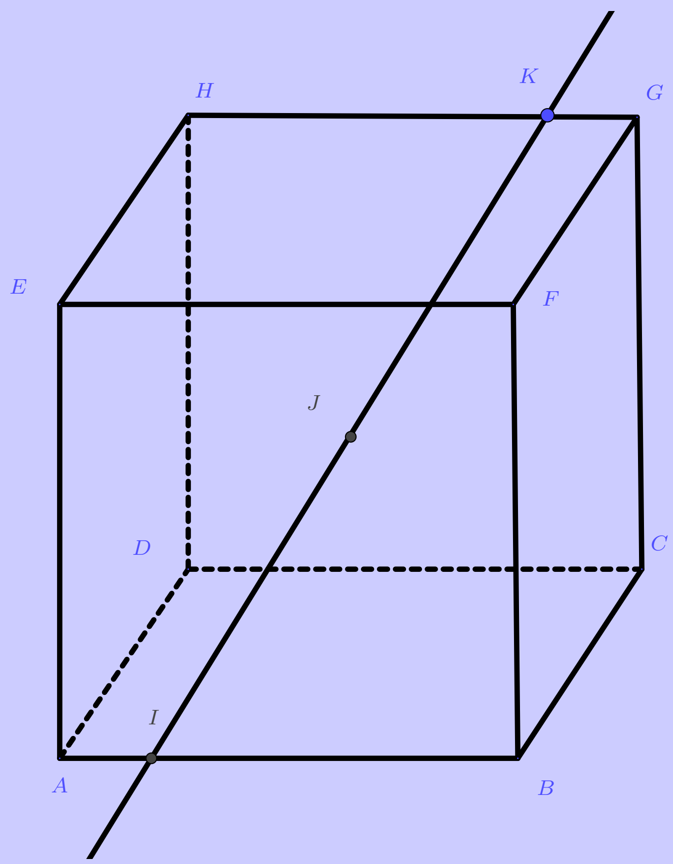
- $\overrightarrow{AI} = \dfrac{1}{5}\overrightarrow{AB}$
- $\overrightarrow{HK} = \dfrac{4}{5}\overrightarrow{HG}$
- J est le milieu de $[EC]$.

1. Placer les points dans la figure suivante :



Solution :

(1 point)



2. Montrer que l'on a :
$$\overrightarrow{IK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}$$

Solution :

(2 points)

On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{HK}\\ &= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{HG}\\ &= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{4}{5}\overrightarrow{AB}\\ &= \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

3. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ comme combinaison linéaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$.

Solution :

(2 points)

On a :
$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EJ}\\ &= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{EC}\\ &= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right)\\ &= -\frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\\ &= \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\end{aligned}$$

4. Montrer que l'on a :
$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IK}$$

Solution :

(1 point)

On a :
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\overrightarrow{IK} &= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE}\right)\\ &= \frac{3}{10}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}\\ &= \overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$

5. En déduire que les points I, J et K sont alignés.

Solution :

(1 point)

Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont colinéaires, donc les points sont alignés.

Exercice 3 : (8 points)
On considère la droite Δ dont on donne une représentation paramétrique :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -5+t \\ y & = & -3t \\ z & = & 1+2t \end{array}\right. \quad , t \in \mathbb{R}$$

On définie les points $A(-2,3,3)$, $B(0,3,5)$ et $C(-2,-9,7)$.

1. Justifier que le point A n'appartient pas à la droite Δ .

Solution :

(1.5 points)
Pour que A soit sur la droite, il faudrait un paramètre t tel que :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2 & = & -5+t \\ 2 & = & -3t \\ 3 & = & 1+2t \end{array}\right.$$
Ce qui donnerai :
$$\left\{\begin{array}{rcl} t & = & 3 \\ t & = & -\dfrac{2}{3} \\ t & = & 1 \end{array}\right.$$
Les trois équations donnent un paramètre différent, ce qui est impossible. Donc le point A n'appartient pas à la droite Δ .

2. Justifier que le point C appartient à la droite Δ .

Solution :

(1.5 points)
Pour que C soit sur la droite, il faudrait un paramètre t tel que :
$$\left\{\begin{array}{rcl} -2 & = & -5+t \\ -9 & = & -3t \\ 7 & = & 1+2t \end{array}\right.$$
Ce qui donnerai :
$$\left\{\begin{array}{rcl} t & = & 3 \\ t & = & 3 \\ t & = & 3 \end{array}\right.$$
Les trois équations donnent le même paramètre. Donc le point C appartient à la droite Δ .

3. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB).

Solution :

(2 points)

La droite (AB) est dirigée par $\overrightarrow{AB}$.

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0-(-2)\\3-3\\5-3\end{pmatrix}$ soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}$

De plus la droite passe par A, on a :

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2+2t \\ y & = & 3 \\ z & = & 3+2t \end{array}\right. \quad , t \in \mathbb{R}$$

4. Montrer que les droites (AB) et Δ sont sécantes, et déterminer les coordonnées du point D, intersection des deux droites.

Solution :

(3 points)

Le point d'intersection (si il existe) vérifie les deux représentations paramétriques.

On cherche donc t_1 et t_2 tel que :

$$\left\{\begin{array}{rcl} -5+t_1 & = & -2+2t_2 \\ -3t_1 & = & 3 \\ 1+2t_1 & = & 3+2t_2 \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcl} -5-1 & = & -2+2t_2 \\ t_1 & = & -1 \\ 1-2 & = & 3+2t_2 \end{array}\right.$$

d'où $\left\{\begin{array}{rcl} t_2 & = & -2 \\ t_1 & = & -1 \\ t_2 & = & -2 \end{array}\right.$

Il y a donc bien intersection (car le système admet bien une solution...) pour trouver les coordonnées du point D, il suffit de remplacer les paramètres (soit dans le premier, ou dans le second... ou dans les deux, on doit trouver la même chose...) :

En remplaçant $t_1 = -1$ dans la représentation de Δ

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5-1 \\ y & = & -3\times(-1) \\ z & = & 1+2\times(-1) \end{array}\right. \text{ soit } \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -6 \\ y & = & 3 \\ z & = & -1 \end{array}\right.$$

Le point d'intersection est donc : $D(-6, 3, -1)$.