Fiche 5

Matrice

1 Opération sur les matrices

Exercice 1 :
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -2 \\ -1 & 4 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $A + B$.
2. Calculer $3A - 4B$.

Exercice 2 :
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer lorsque cela est possible : AB , BA , B^2.
2. Calculer A^2.

Exercice 3 :
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 1 \\ 2 & -3 & 0 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits suivants : $AB \quad , \quad BA \quad , \quad AC \quad , \quad CA$

Exercice 4 :
On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 3 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits suivants : $AB \quad et \quad BA$

Exercice 5 :
On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer les produits suivants : $A^2 \quad et \quad A^3$

Exercice 6 :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits suivants : $A^2 \quad et \quad A^3$

2. Conjecturer puis prouver le calcul de A^n, pour $n \in \mathbb{N}$

Exercice 7 :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les produits suivants : $A^2 \quad et \quad A^3$

2. Montrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = \begin{pmatrix} 3^n & 0 & 0 \\ 3^n - 2^n & 2^n & 0 \\ 3^n - 2^n & 2^n - 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2 Inversion de matrices

Exercice 8 :

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A^{-1} = B$.

Exercice 9 :

On considère les matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Montrer que $A^{-1} = B$.

Exercice 10 :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2.

2. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$.

3. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 11 :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 8 & -2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 12 :

On considère la matrice :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -12 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Calculer $\det(A)$.
2. En déduire que A n'est pas inversible.

3 Système linéaire

Exercice 13 :

On considère le système :

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ -x + 3y = -9 \end{cases}$$

1. On note $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que le système revient à :
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -9 \end{pmatrix}$$
2. Montrer que la matrice A est inversible, et déterminer son inverse.
3. En déduire la résolution du système.

Exercice 14 :

On considère le système :

$$\begin{cases} -2x + 3y + 5z = 13 \\ 2x + z = -4 \\ 4x - 2y - 7z = -9 \end{cases}$$

1. On note $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}$. Montrer que le système revient à :
$$A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -4 \\ -9 \end{pmatrix}$$
2. On pose :
$$\frac{1}{30} \begin{pmatrix} 2 & 11 & 3 \\ 18 & -6 & 12 \\ -4 & 8 & -6 \end{pmatrix}$$
Montrer que la matrice B est la matrice inverse de A.
3. En déduire la résolution du système.