Fiche 4

PGCD

Exercice 1 : Déterminer le pgcd des couples suivants :

1. $a = 48$ et $b = 54$.
2. $a = 56$ et $b = 98$.
3. $a = 51$ et $b = 34$.
4. $a = 112$ et $b = 128$.

Exercice 2 : Montrer que les couples suivants sont premiers entre eux :

1. $a = 88$ et $b = 25$.
2. $a = 78$ et $b = 79$.
3. $a = 67$ et $b = 48$.
4. $a = 781$ et $b = 815$.

Exercice 3 : Déterminer les valeurs des entiers naturels n inférieur à 150 tel que :

$$\text{pgcd}(n, 150) = 15$$

Exercice 4 : Déterminer les couples (x, y), entiers naturels vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{pgcd}(x,y) & = & 10 \\ x+y & = & 60 \end{array}\right.$$

Exercice 5 : Déterminer les couples (x, y), entiers naturels vérifiant le système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \text{pgcd}(x,y) & = & 15 \\ x+y & = & 55 \end{array}\right.$$

Exercice 6 : On considère deux entiers relatifs non nuls a et b.

1. Montrer que pour tout entier k, on a :

$$\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a - kb, b)$$

2. Montrer que $\text{pgcd}(4a + 8b, 3a + 6b) = a + 2b$.
3. Montrer que $\text{pgcd}(7a + 9b, 3a + 4b) = \text{pgcd}(a, b)$.

Exercice 7 : Déterminer deux entiers u et v, tel que $ua + vb = 1$ pour les couples suivants :

1. $a = 8$ et $b = 9$.
2. $a = 18$ et $b = 25$.
3. $a = 44$ et $b = 23$.
4. $a = 78$ et $b = 55$.

Exercice 8 : Montrer que les couples suivants sont premiers entre eux, pour $n \in \mathbb{N}$:

1. $a = n + 3$ et $b = n + 4$.
2. $a = 3n + 4$ et $b = 4n + 5$.
3. $a = 4n^2 + 8n + 15$ et $b = 5n^2 + 10n + 19$.
4. $a = 15n^2+10n+12$ et $b = 21n^2+14n+17$.

Exercice 9 : L'objectif est de démontrer l'égalité de Bezout :

Propriété 1 :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls et d leur PGCD. Alors, il existe deux entiers relatifs u et v tels que :

$$au + bv = d$$

On note $\mathcal{G}$ l'ensemble formé par les entiers naturels strictement positifs de la forme $ma+nb$ où m et n sont des entiers relatifs.

1. Justifier que $\mathcal{G}$ admet un plus petit élément noté g.
2. Montrer que $d|g$.
3. Montrer que le reste r de la division euclidienne de a par g est nul.
4. En déduire que g divise a et b.
5. En déduire que $g|d$.

Exercice 10 : On considère deux entiers relatifs non nuls a et b.

1. Montrer que si a et b sont premier entre eux, alors a et b^2 le sont aussi.
2. Montrer que si a et b sont premier entre eux, alors a^2 et b^2 le sont aussi.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 11 : Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que $3n+5$ et $5n+8$ sont premiers entre eux.

Exercice 12 : En utilisant le théorème de Gauss, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad , \quad 6|3n^2 - 3n$$

Exercice 13 : A l'aide du théorème de Gauss, établir les critères de divisibilité par 6 , par 15.

Exercice 14 :

1. Montrer que 25 et 31 sont premiers entre eux.
2. Déterminer deux entiers u et v tel que :

$$25u + 31v = 1$$

3. En déduire un couple (x, y) de nombres entiers relatifs solution de l'équation diophantienne :

$$25x + 31y = 2$$