Fiche 3

Complexes et géométrie

Exercice 1 :

On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = 1 + 3i$, $z_B = -2 + i$ et $z_C = 3 - 2i$.

1. Placer les points dans un plan munit d'un repère orthonormé.
2. Déterminer l'affixe du point I milieu de $[AC]$.
3. Déterminer l'affixe du point D tel que le quadrilatère $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 2 :

On considère les points A, B, C et D d'affixes $z_A = -3 + i$, $z_B = 1 + 5i$, $z_C = 4 - i$ et $z_D = 4i$.

1. Placer les points dans un plan munit d'un repère orthonormé.
2. Déterminer l'affixe du point E tel que l'on a :
$$\overrightarrow{DE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$$
3. Montrer que les points A, C et E sont aligné.

Exercice 3 :

Calculer les modules des complexes suivants :

- $z_1 = 4 - 4i$
- $z_2 = (4 - 4i)^3$
- $z_3 = \dfrac{-5}{4 + 4i}$
- $z_4 = \dfrac{(-4 + 4i)^2}{5i}$

Exercice 4 :

Déterminer un argument des complexes suivants :

- $z_1 = 2\sqrt{3} - 2i$
- $z_2 = -5 + 5i$
- $z_3 = 1 + i\sqrt{3}$
- $z_4 = -5i$
- $z_5 = -4\sqrt{3} - 4i$
- $z_6 = -3$
- $z_7 = 3 + i\sqrt{3}$
- $z_8 = 2i$

Exercice 5 :
On considère le complexe z_0 de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{5}$. Déterminer le module et un argument des complexes suivants :

- $z_1 = \frac{1}{z_0}$
- $z_2 = \overline{z_0}$
- $z_3 = iz_0$
- $z_4 = -7z_0$
- $z_5 = z_0^5$
- $z_6 = \frac{-5}{z_0^2}$

Exercice 6 :

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :
   - $z_1 = \sqrt{6} + 3i\sqrt{2}$
   - $z_2 = \frac{7}{2}$
   - $z_3 = 3 - 3i$
   - $z_4 = -2 - 2i\sqrt{3}$
2. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
   - z_1 complexe de module 2 et d'argument $\frac{3\pi}{4}$
   - z_2 complexe de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{6}$
   - z_3 complexe de module 5 et d'argument π
   - z_4 complexe de module 3 et d'argument $-\frac{\pi}{2}$

Exercice 7 :
On souhaite trouver les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$.
Pour cela, on considère les complexes suivants :

$$z_1 = 1 + i\sqrt{3} \quad , \quad z_2 = 1 + i \quad , \quad Z = \frac{z_1}{z_2}$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2.
2. Donner la forme algébrique de Z.
3. En déduire les valeurs cherchées.

Exercice 8 :
On souhaite trouver les valeurs exactes de $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$.
On pose $z = 1 + i$.
On pose $z_0 = a + ib$, avec a et b réels positifs vérifiant :

$$z_0^2 = z$$

1. Déterminer le module et un argument de z.

2. En déduire le module et un argument de z_0.

3. Montrer les égalités suivantes :

$$a^2 + b^2 = \sqrt{2} \quad , \quad a^2 - b^2 = 1$$

4. En déduire les valeurs cherchées.

Exercice 9 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal. On note :

$$z_1 = -1 - i\sqrt{3}$$

1. On pose $z_2 = iz_1$, démontrer que $z_2 = \sqrt{3} - i$.

2. (a) Calculer le module et un argument de chacun des nombres complexes z_1 et z_2.
   (b) Placer dans le plan le point M_1 d'affixe z_1 et le point M_2 d'affixe z_2.

3. Soient A, B, et C les points du plan d'affixes respectives z_A, z_B et z_C tels que :

$$z_A = -2 + 2i\sqrt{3} \quad , \quad z_B = 2 - 2i\sqrt{3} \quad , \quad z_C = 8$$

   (a) Montrer que $z_A = 2\overline{z_1}$ et que $z_B = -z_A$.
   (b) Placer les points A, B et C dans le plan.
   (c) Démontrer que le triangle ABC est rectangle.
   (d) Calculer l'affixe du point D de sorte que le quadrilatère $ABCD$ soit un rectangle.

Exercice 10 :

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M dont l'affixe z vérifie :

$$|z - 1 - 2i| = |3 + 4i - z|$$

On note A et B les points d'affixe $z_A = 1 + 2i$ et $z_B = 3 + 4i$.

1. Soit E le point d'affixe $z_E = 5i$. Montrer que $E \in \mathcal{E}$.

2. Soit G le point d'affixe $z_G = 6 - i$. Montrer que $G \in \mathcal{E}$.

3. Soit H le point d'affixe $z_H = 5 + 2i$. Montrer que $H \notin \mathcal{E}$.

4. Montrer que :

$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow AM = BM$$

5. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$

Exercice 11 :

On considère l'ensemble $\mathcal{E}$ des points M dont l'affixe z vérifie :

$$|z-4-i| = |3-i|$$

On note A et B les points d'affixe $z_A = 1+2i$ et $z_B = 3+4i$.

1. Montrer que $A \in \mathcal{E}$ et $B \in \mathcal{E}$.
2. Soit G le point d'affixe $z_G = 4+i$. Montrer que $G \notin \mathcal{E}$.
3. Montrer que :
$$M \in \mathcal{E} \Leftrightarrow GM = GA$$
4. En déduire la nature de l'ensemble $\mathcal{E}$

Exercice 12 :

Déterminer et représenter l'ensemble des points M dont l'affixe vérifie :

- $|z-2| = |z+3i|$
- $|z+4-i| = 2$
- $|2iz-8| = 2$
- $|2iz-8| = |2-3i+2z|$

Exercice 13 :

On cherche à démontrer la propriété suivante :

La somme des carrés des côtés d'un parallélogramme est égale à la somme des carrés de ses diagonales.

1. Démontrer que, pour z et z' complexes :
$$|z+z'|^2 + |z-z'|^2 = 2\left(|z|^2 + |z'|^2\right)$$
2. Retrouver la propriété.