Fiche 2

Divisibilité

1 Diviseurs

Exercice 1 :
Donner l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 12, 20 , 34.

Exercice 2 :
Donner l'ensemble des diviseurs dans $\mathbb{Z}$ de 21.
Trouvez tous les couples (a, b) d'entiers naturels tels que $a^2 - b^2 = 21$.

Exercice 3 :
Démontrer que, pour tout entier n, $4^n + 2$ est un multiple de 3.

Exercice 4 :
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\mathcal{P}_n$ la proposition « 9 divise $10^n - 1$ » et $\mathcal{P}'_n$ ' la proposition « 9 divise $10^n + 1$ ».

1. Démontrer que si $\mathcal{P}_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie.
2. Démontrer que si $\mathcal{P}'_n$ est vraie, alors $\mathcal{P}'_{n+1}$ est vraie.
3. Montrer que $\mathcal{P}_n$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. En déduire que $\mathcal{P}'_n$ est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5 :
Soit k un entier naturel, on pose $a = 9k + 2$ et $b = 12k + 1$.
Montrer que les seuls diviseurs positifs possibles et communs aux entiers a et b sont 1 et 5.

Exercice 6 :
Démontrer que le produit de trois entiers consécutifs est divisible par 6. En déduire que le produit de trois nombres paires consécutifs est divisible par 48.

Exercice 7 :
Soit a un entier naturel.

1. Montrer que $a(a^3 + 1) = a(a + 1)(a^2 - a + 1)$.
2. En déduire que $5a(a^3 + 1)$ est divisible par 10.
3. Montrer par récurrence que $a^5 - a$ est divisible par 10.

2 Division euclidienne

Exercice 8 :
Trouver le reste de la division par 7 du nombre A=247349.

Exercice 9 :
Démontrer que si a^2+b^2 est divisible par 7, alors a et b sont divisibles par 7. (on cherchera tous les reste possible de la division de a^2, b^2 et a^2+b^2 par 7)

Exercice 10 :
Déterminer n entier naturel non nul, tel que la division de n par 64 donne un reste égal au cube du quotient.

Exercice 11 :
Déterminer suivant les valeurs de l'entier naturel n, le quotient et le reste de la division euclidienne de n^2+6n+9 par $n+1$.

Exercice 12 :

1. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ est divisible par 7.
2. En déduire que $2^{3n+1}-2$ est un multiple de 7 et que $2^{3n+2}-4$ est un multiple de 7.
3. Déterminer le reste de la division par 7 des puissance de 2.

3 Congruence

Exercice 13 :
En utilisant les congruence, déterminer le reste de la division euclidienne de :

1. 35^{29} par 7.
2. 89^{29} par 11.
3. 77^{29} par 13.

Exercice 14 :
Démontrer que le nombre $806^{30}+965^{21}$ est un multiple de 23.

Exercice 15 :
Quel est le chiffre des unités de 4568^{12534} ?

Exercice 16 :
Démontrer que $671^{800}-1$ est divisible par 6.

Exercice 17 :
Trouver, suivant les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 8. Quel est l'ensemble des entiers naturels n tels que le nombre $3^n.n-9n+2$ soit divisible par 8 ?

Exercice 18 :
Démontrer que, pour tout entier n, le nombre $3^{n+3}-4^{4n+2}$ est divisible par 11.