

Fiche 1

Les nombres complexes

Exercice 1: Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z_1 = 5 + 2i + 8 + 7i$

2. $z_2 = -3 - 2i + 2 + 2i$

3. $z_3 = 7(3 + i)$

4. $z_4 = 2i(4 - 5i)$

5. $z_5 = (5 + 2i)(3 - i)$

6. $z_6 = (8 - 3i)(2 + i)$

7. $z_7 = (3 - 2i)^2 + 4i(3 + i)$

8. $z_8 = (5 - i)(-5 - i) - i(2 + 7i)$

Exercice 2: On pose $z_1 = 2 - 5i$ et $z_2 = 3 + i$. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $Z_1 = z_1 + \bar{z}_2$

2. $Z_2 = \bar{z}_1 \times z_2$

3. $Z_3 = \frac{z_1}{z_2}$

4. $Z_4 = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}$

Exercice 3: Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

1. $z_1 = \frac{5}{1 - i}$

2. $z_2 = \frac{3 - 4i}{2 + 3i}$

3. $z_1 = \frac{i}{3 + 3i}$

4. $z_1 = \frac{1 + \sqrt{3}i}{\sqrt{3} - i}$

Exercice 4: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

(a) $2(z - i) = 3$

(b) $5iz - 1 = -4$

(c) $3z - 4 = iz + 2$

(d) $5(i + 2z) - 4(z + 1) = 3z - 5i + 3$

Exercice 5: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes :

(a) $2\bar{z} + 5 - 2i = 4 + i + 3\bar{z}$

(b) $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$

Exercice 6: Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

(1) $Z_1 = (6 + i)^4$

(2) $Z_2 = (1 - i)^6$

(3) $Z_3 = (1 + \sqrt{3}i)^4$

Exercice 7: Les équations suivantes ont des solutions complexes notées $z_1 = \alpha + i\beta$ et $z_2 = \alpha - i\beta$. Déterminer les valeurs de α et β :

$$\begin{array}{l|l} 1. (E_1) & 3x^2 - 6x + 6 = 0 \\ 2. (E_2) & 4x^2 + 16x + 17 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 3. (E_3) \quad 2x^2 + 18 = 0 \\ 4. (E_4) \quad 4x^2 - 12x + 25 = 0 \end{array}$$

Exercice 8: Résoudre dans \mathbb{C} les équations suivantes (on donnera les solutions sous leur forme algébrique) :

$$\begin{array}{l|l} 1. (E_1) & x^2 - 2x - 15 = 0 \\ 2. (E_2) & x^2 - 6x + 10 = 0 \\ 3. (E_3) & 2x^2 + 12x + 18 = 0 \\ 4. (E_4) & x^2 + 16 = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} 5. (E_5) \quad x^2 + 7x = 0 \\ 6. (E_6) \quad x^2 + 2x + 3 = 0 \\ 7. (E_7) \quad 5x^2 + 15 = 0 \\ 8. (E_8) \quad x^2 + x + 1 = 0 \end{array}$$

Exercice 9: On considère le polynôme P suivant :

$$P(z) = z^4 - 3z^3 + \frac{9}{2}z^2 - 3z + 1$$

- Calculer $P(i + 1)$.
- Comparer $P(\bar{z})$ et $\overline{P(z)}$ et en déduire que si z_0 est racine de P alors \bar{z}_0 aussi.
- Montrer que si z_0 est racine de P alors $\frac{1}{z_0}$ est aussi racine de P .
- Déterminer toutes les racines de P .

Exercice 10: On considère le polynôme P suivant :

$$p(x) = 2x^3 - 11x^2 + 14x + 10$$

- Calculer $p\left(-\frac{1}{2}\right)$.
- Factoriser le polynôme par par $(2x + 1)$
- Déterminer toutes les racines de p .

Exercice 11: On considère le polynôme P suivant :

$$p(x) = 4x^3 - 12x^2 + 13x - 5$$

- Déterminer une racine évidente de p .
- En déduire une première factorisation de p .
- Résoudre l'équation $p(x) = 0$.
- Résoudre l'équation $p(x) = -5$.