Chapitre 5

Matrice

Table des matières

1 Notion de matrice

Définition 1 :

Une matrice A de dimension (n,p) aussi noté $n \times p$ est un tableau à n lignes et à p colonnes, composé de nombres réels, appelés coefficients de la matrice.
De façon générale, on note $A = (a_{i,j})$, $a_{i,j}$ étant le coefficient situé à la i ème ligne et à la j ième colonne.
L'ensemble des matrices de dimension (n,p) est $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

Exemple 1 :

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ est une matrice de dimension 2×3. On a : $a_{1,2} = 2$ et $a_{2,1} = 0$

Définition 2 :

Matrices particulières

↬ Lorsque $n = 1$, on dit que M est une matrice ligne, formée d'une seule ligne.
↬ Lorsque $p = 1$, on dit que M est une matrice colonne, formée d'une seule colonne.
↬ Lorsque $n = p$, on dit que M est une matrice carrée d'ordre n.
↬ Une matrice diagonale est une matrice carrée, dont tous les termes sont nuls sauf lorsque $i = j$.
↬ La matrice identité d'ordre n est la matrice diagonale d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 1. On la note I_n.
↬ La matrice nulle de taille $n \times p$, notée $O_{n,p}$, est la matrice de taille $n \times p$ dont tous les coefficients sont nuls.

Exemple 2 :

- Donner des exemples de matrices colonnes et de matrices lignes.
- Donner un exemple de matrice diagonale d'ordre 3.
- Donner un exemple de matrice carrée d'ordre 2.
- Donner les matrices O_3 et I_3.

Définition 3 :

Matrices égales

Deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j}$ de même dimension $n \times p$ sont égales si et seulement si $a_{i,j} = b_{i,j}$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et $j \in \{1; 2; ...; p\}$.

2 Opérations sur les matrices

2.1 Somme et produit par un réel

Définition 4 :

Somme de deux matrices et produit par un réel

• Deux matrices $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$ sont sommables si et seulement si elles ont la même dimension.
On note $A + B$ cette somme et on a : $A + B = (s_{i,j})$ où $s_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$ pour tout $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et $j \in \{1; 2; ...; p\}$
L'addition de deux matrices se fait en additionnant les éléments situés au même endroit dans chaque matrice.
• Le produit de la matrice A par un réel λ, noté λA est la matrice $M = (m_{i,j})$ de taille $n \times p$ telle que, pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a : $m_{i,j} = \lambda \times a_{i,j}$

Exercice 1 :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 6 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

• Déterminer la somme $A + B$.
• Calculer $2A$ et $\frac{1}{2}B$.

Propriété 1 :

Soient A, B et C trois matrices de même dimension $n \times p$ et α et β deux réels.
• commutativité de la somme de matrices : $A + B = B + A$.
• associativité de la somme des matrices : $A + (B + C) = (A + B) + C$
• $A + O_{n,p} = O_{n,p} + A = A$
• $1 \times A = A \times 1 = A$
• distributivité du produit par un réel : $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta B$ et $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$
• $\lambda \times A = O_{n,p} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \quad \text{ou} \quad A = O_{n,p}$.

Définition 5 :

Opposé d'une matrice

On appelle opposée de A, matrice de dimension $n \times p$, la matrice $M = (-1) \times A$ notée $-A$, telle que pour tous $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$, on a : $m_{i,j} = -a_{i,j}$.
De plus, on note : $A - B = A + (-B)$.

Exercice 2 : Avec les matrices A et B de l'exemple précédent, calculer $2A - 3B$.

2.2 Produit de matrices

Définition 6 :

Soit $A = (a_{i,j})$ une matrice de dimension (n,p) et $B = (b_{i,j})$ de dimension (m,q).
Le produit matriciel AB est défini si et seulement si $p = m$.
Alors $AB = (p_{i,j})$ où $p_{i,j} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} a_{i,k} \times b_{k,j}$ pour tous $i \in \{1; 2; ...; n\}$ et $j \in \{1; 2; ...; q\}$.

Exercice 3 :

1. Soient $E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$ et $F = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 4 \end{pmatrix}$. Calculer EF.
2. Soient $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & -1 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ quatre matrices.
Calculer, lorsque c'est possible, les produits AB, AC, CD et BC.

Propriété 2 :

Soit A, B, C trois matrices et k un réel.
Les propriétés suivantes sont valables sous réserve que les calculs soient possibles.
- associativité de la multiplication : $(AB)C = A(BC) = ABC$
- distributivité de la multiplication : $A(B+C) = AB + AC$ et $(A+B)C = AC + BC$.
- $(kA)B = A(kb) = k(AB)$
- $O_{n,p}A = AO_{n,p} = O_{n,p}$ et $I_n \times A = A \times I_n = A$

Remarque :
Le produit de matrices n'est pas commutatif :
$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+2\times0 & 1\times3+2\times4 \\ 3\times1+4\times0 & 3\times3+4\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 11 \\ 3 & 25 \end{pmatrix}$ et
$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\times1+3\times3 & 1\times2+3\times4 \\ 0\times1+4\times3 & 0\times2+4\times4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 12 & 16 \end{pmatrix}$

Définition 7 :

Soient A une matrice carrée d'ordre n et k un entier naturel non nul.
La puissance k ième de A, notée A^k est la matrice $A^k = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{k \text{ fois}}$.

Si $k = 0$, $A^0 = I_n$.

2.3 Inverse de matrices

Définition 8 :

Inverse d'une matrice

Une matrice carrée A d'ordre n avec n un entier supérieur ou égal à 2, est dite inversible s'il existe une matrice carrée B d'ordre n telle que :

$$AB = BA = I_n$$

Dans ce cas, B est unique et est appelée la matrice inverse de A et on note $B = A^{-1}$.

Exercice 4 : Montrer que la matrice $B = \begin{pmatrix} -2 & 1,5 \\ 1 & -0,5 \end{pmatrix}$ est l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Définition 9 :

Déterminant d'une matrice

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

On appelle déterminant de A le nombre : $\det(A) = ad - bc$.

Propriété 3 :

Matrice d'ordre 2 inversible

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2.

A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$. On a alors : $A^{-1} = \dfrac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Exercice 5 : Les matrices $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ? Si oui, donner leurs inverses.

3 Applications

3.1 Résolution de système

Propriété 4 :

Un système linéaire de la forme : $\left\{\begin{array}{rcl} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + ... + a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + ... + a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ & ... & \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + ... + a_{n,n}x_n & = & b_n \end{array}\right.$ est équivalent à l'équation $AX = B$ où $A = (a_{i,j})$ est une matrice carrée d'ordre n et $X = (x_j)$ et $B = (b_j)$ sont des matrices colonnes.
Si A est inversible, alors l'équation $AX = B$ admet une unique solution qui est : $X = A^{-1}B$.
Si A n'est pas inversible, alors soit le système n'a pas de solution, soit il en admet une infinité.

Exercice 6 : Résoudre le système $\left\{\begin{array}{rcl} 5x + 2y & = & 16 \\ 4x + 3y & = & 17 \end{array}\right.$

3.2 Transformations géométriques

On se place dans un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$ du plan.
Soit a, b, c et d quatre réels.

Définition 10 :

Une translation de vecteur $\vec{t}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x, y)$ associe son point image $M'(x', y')$ tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{t}$ se définit matriciellement sous la forme :
$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

Propriété 5 :

Pour les transformations planes suivantes, on définit la matrice de transformation $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ qui à tout point $M(x, y)$ du plan associe son point image $M'(x', y')$ tel que $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$:

- pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des abscisses, on a $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$
- pour une symétrie axiale par rapport à l'axe des ordonnées, on a $T = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- pour une rotation de centre O d'angle θ, on a $T = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$
- pour une homothétie de centre O et de rapport $k \in \mathbb{R}$, on a $T = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$

Exercice 7 : Dans un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, on donne $A(2;4)$ et $B(5;3)$.

1. Calculer les coordonnées de l'image A' de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.
2. Calculer les coordonnées de l'image B' de B par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-3\end{pmatrix}$

3.3 Suites de matrices

On désigne par k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

a) Etude des suites de matrices de la forme $U_{n+1} = AU_n$:

Définition 11 :

Une suite de matrices colonnes (respectivement lignes) de taille $(k,1)$ (respectivement $(1,k)$) est une fonction qui à tout entier naturel n associe une matrice colonne (respectivement ligne) de même dimension.

Exemple 3 :

La fonction U définie sur $\mathbb{N}$, par $n \mapsto \begin{pmatrix}n\\n^2\end{pmatrix}$ définit une suite de matrices colonnes de dimension $(2,1)$. On a par exemple : $U_2 = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ et $U_5 = \begin{pmatrix}5\\25\end{pmatrix}$.

Propriété 6 :

Soient A une matrice carrée d'ordre k et (U_n) la suite de matrices colonnes de dimension $(k,1)$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $\left\{\begin{array}{lll} U_0 & & \\ U_{n+1} & = & A \times U_n \end{array}\right.$

Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n \times U_0$

Exercice 8 : Soient $A = \begin{pmatrix}-1 & 2\\1 & 2\end{pmatrix}$ et (U_n) la suite de matrices colonnes définie par $U_0 = \begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ et pour tout

$n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A \times U_n$.

1. Calculer U_1.
2. Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, U_n en fonction de A et de n.
3. A l'aide de la calculatrice, calculer U_{10}.

b) Etude des suites de matrices de la forme $U_{n+1} = AU_n + B$:

On s'intéresse ici à la suite de matrices colonnes (U_n) de dimension $(k, 1)$, définie par la donnée de son premier terme U_0 et pour tout entier naturel n, par la relation de récurrence $U_{n+1} = A \times U_n + B$ où A est une matrice carrée d'ordre k et B une matrice colonne de dimension $(k, 1)$.

Définition 12 :

On appelle état stable de la suite (U_n) une matrice colonne S de dimension $(k, 1)$ telle que :

$$S = AS + B$$

Propriété 7 :

• Si la matrice $I - A$ est inversible, alors il existe un unique état stable. Il est donné par :

$$S = (I_k - A)^{-1} \times B$$

• Pour tout entier naturel n, la suite de matrices colonnes (V_n) de terme général $V_n = U_n - S$ vérifie

$$\begin{cases} V_0 &= U_0 - S \\ V_{n+1} &= A \times V_n \end{cases}$$

et donc pour tout entier naturel n, $V_n = A^n \times V_0$ et on a alors $U_n = A^n \times (U_0 - S) + S$

Exercice 9 : Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \begin{pmatrix} 10 \\ 20 \end{pmatrix}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} = A \times U_n + B$ avec $A = \begin{pmatrix} 0,95 & 0 \\ 0 & 1,1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

1. Calculer U_1.
2. (a) Justifier que $I_2 - A$ est inversible.
   (b) Calculer $S = (I_2 - A)^{-1} \times B$.
3. Montrer que la suite (V_n) définie pour tout entier naturel n par $V_n = U_n - S$, vérifie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = A \times V_n$.
4. En déduire le terme général de (V_n) puis déterminer l'expression de U_n en fonction de n puis calculer U_{10}.