Chapitre 3

Complexes et géométrie

Table des matières

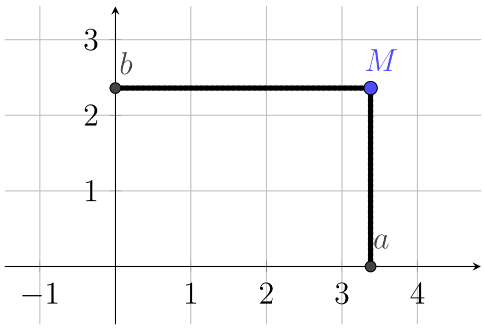
1 Nombres complexes et géométrie

1.1 Représentation graphique d'un nombre complexe

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 1 :

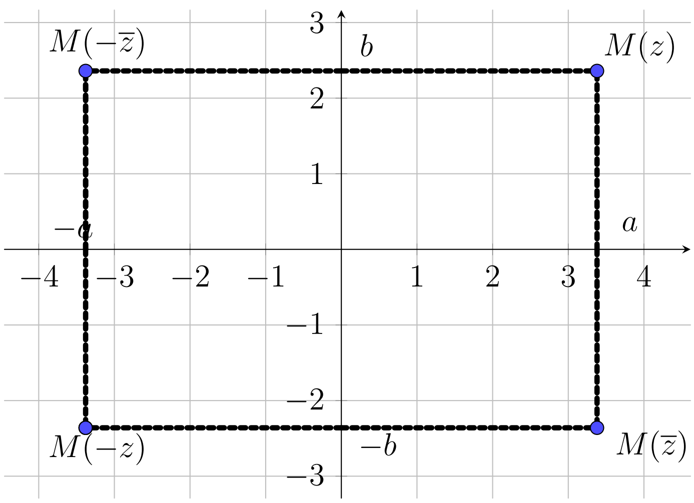
- On appelle plan complexe le plan muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
- A tout point M de coordonnées $(a; b)$ dans le repère avec a et b des réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre z est appelé affixe du point M. On le note z_M.
- A tout vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$ avec a et b des réels, on peut associer l'unique nombre complexe $z = a + ib$. Le nombre z est appelé affixe du vecteur $\overrightarrow{w}$. On le note $z_{\overrightarrow{w}}$.
- A tout nombre complexe $z = a + ib$ avec a et b des réels, on peut associer :
  - l'unique point M de coordonnées $M(a; b)$. M est l'image de z et on note $M(z)$ (se lit " M d'affixe z ").
  - l'unique vecteur $\overrightarrow{w}(a; b)$. $\overrightarrow{w}$ est appelé vecteur image de z



Exercice 1 : Placer dans le plan complexe les images A, B, C et D d'affixes $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 - 2i$, $z_C = -1 + 2i$ et $z_D = -1 - 2i$.

Conséquences graphiques :

- Les points $M(z)$ et $M_1(\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- Les points $M(z)$ et $M_2(-z)$ sont symétriques par rapport à O.
- Les points $M(z)$ et $M_3(-\overline{z})$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
- $M(z)$ appartient à l'axe des abscisses si et seulement si z est réel si et seulement si $\text{Im}(z) = 0$.
- $M(z)$ appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si z est imaginaire pur si et seulement si $\text{Re}(z) = 0$.



Propriété 1 :

Pour tous vecteurs $\overrightarrow{w}$ et $\overrightarrow{w'}$ d'affixes $z_{\overrightarrow{w}}$ et $z_{\overrightarrow{w'}}$.

- $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{w'} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{w}} = z_{\overrightarrow{w'}}$
- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{w} + \overrightarrow{w'}$ est $z_{\overrightarrow{w}} + z_{\overrightarrow{w'}}$.
- Si k est un réel, l'affixe du vecteur $k\overrightarrow{w}$ est $kz_{\overrightarrow{w}}$.

Exercice 2 : Soit $\overrightarrow{w}$ d'affixe $z_{\overrightarrow{w}} = 1 + i$ et $\overrightarrow{w'}(-1; -2)$ dans le repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. Déterminer l'affixe du vecteur $2\overrightarrow{w} - \overrightarrow{w'}$.

Propriété 2 :

Soit A et B deux points d'affixes respectives z_A et z_B.

- L'affixe du vecteur $\overrightarrow{AB}$ est $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ noté z_I est : $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.

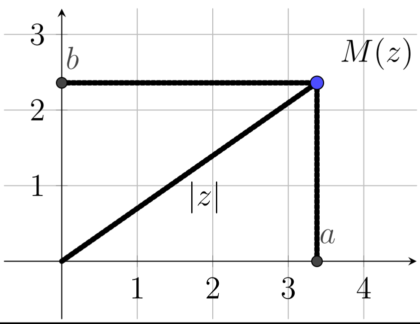
Exercice 3 : Soit $A(1 + i)$ et B d'affixe $z_B = -2 + 3i$.

1. Déterminer l'affixe des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$.
2. Déterminer l'affixe du milieu C de $[AB]$.

1.2 Module d'un nombre complexe

Définition 2 :

Soit M le point d'affixe z dans le plan complexe.
Le module de z, noté $|z|$, est la distance OM.
On a donc : $|z| = OM$.



Propriété 3 :

- $|z|$ est un nombre réel supérieur ou égal à 0.
- Pour tout nombre complexe z écrit sous forme algébrique $z = a + ib$, on a :

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \text{et} \quad |z|^2 = z \times \overline{z}$$

- Si z est réel, alors il existe un réel a tel que $z = a$ et alors $|z| = \sqrt{a^2} = |a|$ donc le module d'un réel a est la valeur absolue de a.
- Si z est imaginaire pur, alors il existe un réel b tel que $z = ib$ et alors $|z| = \sqrt{b^2} = |b|$.

Exercice 4 : Calculer le module des nombres complexes suivants :
$z_1 = -1 + i\sqrt{3}$ $\qquad$ $z_2 = 1 - i$

Propriété 4 :

Pour tous nombres complexes z et z' :

- $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|-z| = |\overline{z}| = |-\overline{z}| = |z|$
- $|z| = \sqrt{z \times \overline{z}}$ ou $|z|^2 = z \times \overline{z}$
- $|z \times z'| = |z| \times |z'|$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
- Si $z \neq 0$, $\left|\dfrac{z'}{z}\right| = \dfrac{|z'|}{|z|}$
- Pour tous $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, $|z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n| = |z_1| \times |z_2| \times \cdots \times |z_n|$.
  En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|z^n| = |z|^n$
- $|z + z'| \leq |z| + |z'|$ (Inégalité triangulaire)

Exercice 5 : Calculer le module des nombres complexes suivants :
$z_1 = \left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)^2$ $\qquad$ $z_2 = (-3 + 4i)\left(\sqrt{6} - i\sqrt{2}\right)$ $\qquad$ $z_3 = \dfrac{-3i}{\left(\sqrt{3} + i\right)^3}$

Remarque :
Pour tout nombre complexe z non nul, on a : $\dfrac{1}{z} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$

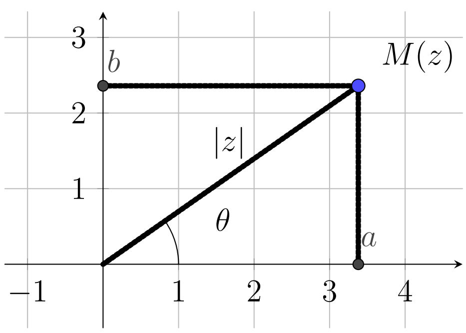
1.3 Arguments d'un nombre complexe non nul

Dans cette partie, on considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$, un point M d'affixe z distinct de O donc $z \neq 0$.

Définition 3 :

Un argument de z est une mesure en radians de l'angle orienté $\left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)$.

On le note $arg(z)$. On a donc : $arg(z) = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right)\ [2\pi] = \left(\vec{u}; \overrightarrow{OM}\right) + k \times 2\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.



Remarques :

• Si z est nul, alors l'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ n'est pas défini. On ne peut donc pas parler d'argument du nombre complexe 0.

• L'angle orienté $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ admet une infinité de mesures, toutes égales à un multiple de 2π près donc un nombre complexe a une infinité d'arguments. Si θ est un argument de z, on a alors : $arg(z) = \theta\ [2\pi]$.

La mesure de l'angle $\left(\vec{u};\overrightarrow{OM}\right)$ appartenant à $]-\pi;\pi]$ est appelée mesure principale de l'angle et on se ramène à cette mesure principale dans les calculs d'arguments.

Propriété 5 :

On considère un nombre complexe z non nul.

- $z \in \mathbb{R}^{*+} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = 0\ [2\pi]$
- $z \in \mathbb{R}^{*-} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = \pi\ [2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}^{+} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$
- $z \in i\mathbb{R}^{-} \quad \Leftrightarrow \quad \arg(z) = -\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

Méthode pour déterminer un argument :

Soit z un nombre complexe non nul tel que $z = a + ib$ avec a et b des réels.

Pour déterminer un argument de z, on suit la démarche suivante :

• On calcule et on simplifie au maximum le module de z : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$

• Soit θ un argument de z.

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Ayant le cosinus et le sinus de l'angle, on peut grâce au cercle trigonométrique et aux valeurs remarquables du cosinus et du sinus, déterminer un argument de z.

Exercice 6 : Déterminer un argument des nombres complexes suivants :

$z_1 = -1 + i\sqrt{3} \qquad z_2 = 1 - i$

Propriété 6 :

Pour tous nombres complexes non nuls z et z' :

- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg(-\overline{z}) = -\arg(z) + \pi\ [2\pi]$
- $\arg(z \times z') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
- $\arg\left(\dfrac{z'}{z}\right) = \arg(z') - \arg(z)\ [2\pi]$
- Pour tous $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, $\arg(z_1 \times z_2 \times \cdots \times z_n) = \arg(z_1) + \arg(z_2) + \ldots + \arg(z_n)\ [2\pi]$
  et en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\arg(z^n) = \text{n} \arg(z)\ [2\pi]$

Exercice 7 : Calculer un argument dans $]-\pi;\pi]$ des nombres complexes suivants :

$z_1 = (2-2i)\left(\sqrt{3}+i\right)$ $\qquad z_2 = \left(\sqrt{3}+i\right)^3$ $\qquad z_3 = \dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{6}}{2i}$

2 Formes trigonométriques et exponentielles

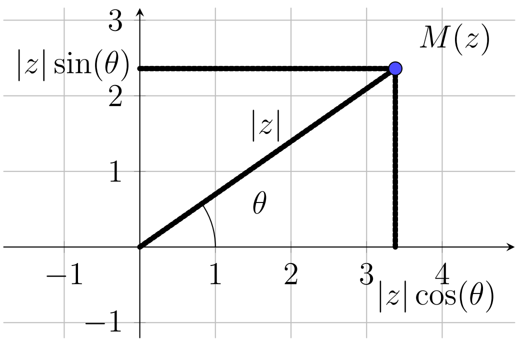
2.1 Forme trigonométrique d'un nombre complexe non nul

Propriété 7 :

Pour tout nombre complexe z non nul $z = a+ib$ où a et b sont réels et θ un argument de z, alors on a :

$$a = |z| \times \cos(\theta) \qquad \text{et} \qquad b = |z| \times \sin(\theta)$$

Ainsi, on a : $z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$



Définition 4 :

Tout nombre complexe non nul z de module $|z|$ et ayant pour argument θ, s'écrit sous la forme :

$$z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$$

Cette forme est appelée forme trigonométrique de z.

Méthodes de calcul pour passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique et l'inverse :

• Passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :
Si $z = a+ib$ avec a et b des réels, alors :
- calcul du module : $|z| = \sqrt{a^2+b^2}$
- calcul d'un argument : soit θ un argument de z :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Grâce au cercle trigonométrique, vous pouvez lire l'angle θ et on a alors : $z = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$
(*Attention de simplifier AU MAXIMUM le module, sinon vous n'allez pas retomber sur les valeurs remarquables de cos et sin que vous avez apprises l'année dernière*)

• Passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :
On doit déterminer les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ puis on développe et on trouve ainsi la forme algébrique de z.

Exercice 8 :

1. Mettre les nombres complexes suivants sous forme trigonométrique :
$z_8 = \sqrt{3} - i \qquad z_9 = -2 - 2i$

2. Mettre les nombres complexes suivants sous forme algébrique :
$z_{10} = 2\left(\cos(\frac{-2\pi}{3}) + i\sin(\frac{-2\pi}{3})\right) \qquad z_{11} = 4\left(\cos(\frac{5\pi}{6}) + i\sin(\frac{5\pi}{6})\right)$

Propriété 8 :

• Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont le même module et des arguments égaux à 2π près.
• Si on a un nombre complexe z écrit sous la forme $z = r\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

Exercice 9 : Déterminer la forme trigonométrique de :

$$z_3 = -2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \quad \text{et} \quad z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\right)$$

Propriété 9 :

Pour tous réels a et b, on a :

(a) $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

(b) $\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

(c) $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \sin(b)\cos(a)$

(d) $\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \sin(b)\cos(a)$

Propriété 10 :

Pour tout réel a, on a :

(a) $\cos(2a) = \cos^2(a) - \sin^2(a) = 2\cos^2(a) - 1 = 1 - 2\sin^2(a)$

(b) $\sin(2a) = 2\cos(a)\sin(a)$

Exercice 10 :

1. Déterminer la valeur de $\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}$, puis en déduire la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2. En remarquant que $\frac{\pi}{6} = 2 \times \frac{\pi}{12}$, utiliser une autre méthode pour déterminer la valeur exacte de $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$.

2.2 Forme exponentielle d'un nombre complexe non nul

Théorème 1 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.
• En utilisant les formules d'addition de cosinus et du sinus, on montre que, pour tous réels θ et θ' : $f(\theta + \theta') = f(\theta) \times f(\theta')$ et $f(0) = 1$.
• Ces propriétés sont celles de la fonction exponentielle donc par analogie avec la fonction exponentielle dans $\mathbb{R}$, on pose : $f(\theta) = e^{i\theta}$ donc $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Remarque :
La forme trigonométrique de $e^{i\theta}$ est : $\cos(\theta) + i\sin(\theta)$ et on en déduit que $|e^{i\theta}| = 1$ et $\arg(e^{i\theta}) = \theta\ [2\pi]$.

Définition 5 :

Tout nombre complexe non nul s'écrit sous la forme $z = |z|e^{i\theta}$ avec $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.
Cette écriture est appelée forme exponentielle de z.
Réciproquement, si z est un nombre complexe non nul tel que $z = re^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)\ [2\pi]$.

Méthodes de calcul pour passer de la forme algébrique à la forme exponentielle et l'inverse :
• Passage de la forme algébrique à la forme exponentielle :
Si $z = a + ib$ avec a et b des réels, alors :
- calcul du module : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
- calcul d'un argument : soit θ un argument de z :

$$\cos(\theta) = \frac{a}{|z|} \qquad \sin(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

Grâce au cercle trigonométrique, vous pouvez lire l'angle θ et on a alors : $z = |z| \times e^{i\theta}$
(*Attention de simplifier AU MAXIMUM le module, sinon vous n'allez pas retomber sur les valeurs remarquables de cos et sin que vous avez apprises l'année dernière*)

• Passage de la forme exponentielle à la forme algébrique :
On passe de la forme exponentielle à la forme trigonométrique : $z = |z| \times e^{i\theta} = |z|\left(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\right)$.
On doit ensuite déterminer les valeurs de $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ puis on développe et on trouve ainsi la forme algébrique de z.

Exercice 11 :

- Mettre sous forme algébrique $e^{i\frac{5\pi}{6}}$, $e^{i\frac{\pi}{2}}$, $e^{-2i\pi}$
- Soit z un nombre complexe de module 3 et ayant pour argument $\frac{-\pi}{4}$. Déterminer la forme exponentielle puis algébrique de z.
- Soit $z_2 = -1 + i\sqrt{3}$. Déterminer la forme exponentielle de z_2.

Propriété 11 :

Soit θ et θ' des réels quelconques et r et r' des réels strictement positifs.

- $r\ e^{i\theta} = r'\ e^{i\theta'} \Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta'\ [2\pi]$
- $\overline{r\ e^{i\theta}} = r\ e^{-i\theta}$
- $-r\ e^{i\theta} = r\ e^{i(\theta+\pi)}$
- $r\ e^{i\theta} \times r'\ e^{i\theta'} = rr'\ e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{r\ e^{i\theta}} = \dfrac{1}{r}\ e^{-i\theta}$
- $\dfrac{r'\ e^{i\theta'}}{r\ e^{i\theta}} = \dfrac{r'}{r}\ e^{i(\theta'-\theta)}$
- $\left(r\ e^{i\theta}\right)^n = r^n\ e^{in\theta}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

Exercice 12 : Soit $z_1 = -2\ e^{i\frac{\pi}{2}}$, $z_2 = i\ e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z_3 = 4\ e^{-i\frac{2\pi}{3}}$

1. Déterminer la forme exponentielle de z_1 et z_2.
2. Déterminer la forme exponentielle de $z_1 \times z_2 \times z_3$ et $z_2 \times (z_1)^2$.

2.3 Formules d'Euler et Moivre

Propriété 12 :

Formules d'Euler :

Pour tout réel $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

Propriété 13 :

Formules de Moivre :

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{Z}$, on a :

$$\cos(n\theta) + i\sin(n\theta) = (\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n$$

Exercice 13 :

1. Exprimer, pour tout réel θ, $\cos^3(\theta)$ en fonction d'une somme de cosinus de la forme $\cos(n\theta)$ où $n \in \mathbb{N}$. (on dit qu'on linéarise $\cos^3(\theta)$).
2. Exprimer, pour tout réel x, $\cos(3x)$ en fonction d'une somme de cosinus de la forme $\cos^n(x)$ où $n \in \mathbb{N}$.

3 Applications géométriques

3.1 Lien avec la géométrie

Propriété 14 :
Soient $A(z_A)$ et $B(z_B)$ deux points dans le plan complexe. On a : $AB = |z_B - z_A|$.

Exercice 14 : On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

1. On considère les points A et B d'affixes respectives $z_A = 2 + 5i$ et $z_B = -1 + 2i$.
   Calculer les longueurs OA et AB.
2. Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que :
   a) $|z| = 18$ b) $|z + 2 - i| = 4$ c) $|z - 3 - i| = |z + 5 - 2i|$

Propriété 15 :
Soient A et B deux points d'affixes respectices z_A et z_B dans le plan complexe.

1. Soit r un nombre réel strictement positif, l'ensemble (F) des points M du plan d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = r$ est le cercle de centre A et de rayon r.
2. L'ensemble (E) des points M du plan d'affixe z vérifiant $|z - z_A| = |z - z_B|$ est la médiatrice du segment $[AB]$.

Remarque :
Calculer des distances permet de démontrer qu'un triangle est rectangle (avec la réciproque du théorème de Pythagore) ou isocèle ou équilatéral, qu'un point appartient à un cercle, à la médiatrice d'un segment.

Propriété 16 :

- $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AB}\right) = \arg(z_B - z_A)\ [2\pi]$
- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi]$

Conséquences :
• A, B et C sont alignés si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0[\pi]$ si et seulement si
$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$
• (AB) et (AC) sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ si et seulement si
$\arg\left(\dfrac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$
• (AB) et (CD) sont parallèles si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = 0\ [\pi]$ si et seulement si
$\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = 0\ [\pi]$

• (AB) et (CD) sont perpendiculaires si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$ si et seulement si $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$

Remarque :
Calculer des mesures d'angles orientés permet de démontrer le parallélisme ou l'orthogonalité de droite, l'alignement de points...

Exercice 15 : On se place dans un repère orthonormé $(O; \vec{u}; \vec{v})$. On considère les points A, B et C d'affixes $z_A = \sqrt{3} + 3i$, $z_B = 2\sqrt{3}$ et $z_C = 2i$.

1. Calculer les modules des nombres complexes : $z_A - z_C$, $z_B - z_A$ et $z_B - z_C$.
   En déduire la nature du triangle ABC.
2. Déterminer l'affixe du centre K du cercle circonscrit $\mathcal{C}$ au triangle ABC.
   Préciser le rayon r de ce cercle.
3. Montrer que le point O appartient au cercle $\mathcal{C}$.

3.2 Racines n-ièmes de l'unité

Définition 6 :
On note $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1. On a donc : $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

Exercice 16 : Donner des exemples de nombres complexes de module 1.

Remarque :
$z \in \mathbb{U}$ signifie que le point $M(z)$ appartient au cercle trigonométrique.
Autrement dit, $z \in \mathbb{U} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\ \theta \in \mathbb{R}$ tel que $z = e^{i\theta}$.
On a donc que $0 \notin \mathbb{U}$.

Propriété 17 :
On considère deux nombres complexes z et z' dans $\mathbb{U}$.
On a alors : $z \times z' \in \mathbb{U}$ et $\frac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

Définition 7 :
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine n-ième de l'unité les solutions de l'équation complexe : $z^n = 1$.

Remarques :
• 1 est une racine n-ième de l'unité pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
• Les racines n-ièmes de l'unité sont les racines du polynôme $z^n - 1$.

Propriété 18 :

Pour tout entier naturel non nul n, $z^n = 1$ admet exactement n racines n-ièmes de l'unité distinctes.
Ce sont les nombres complexes de la forme $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ où k est un entier naturel compris entre 0 et $n-1$.

Définition 8 :

On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n-ièmes de l'unité. On a alors :

$$\mathbb{U}_n = \{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \text{avec k un entier naturel compris entre 0 et } n-1\}$$

Exercice 17 :

- Déterminer $\mathbb{U}_4$.
- Résoudre dans $\mathbb{C}$, les équations suivantes :
  a) $(z+2)^5 = 1$ b) $z^3 = -27$

Propriété 19 :

• Les points images des éléments de $\mathbb{U}_n$ avec n un entier naturel non nul, appartiennent au cercle trigonométrique.
• Les points images des éléments de $\mathbb{U}_n$ avec n un entier naturel supérieur ou égal à 3, sont les sommets d'un polygone régulier à n sommets.

Exercice 18 : Représenter les points images des éléments de $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.