Chapitre 1

Les nombres complexes

Table des matières

1 Définition

Définition 1 :

Il existe un ensemble, noté $\mathbb{C}$,de nombres appelés nombres complexes, tel que :

- $\mathbb{C}$ contient $\mathbb{R}$;
- $\mathbb{C}$ est muni d'une addition et d'une multiplication pour lesquelles les règles de calcul sont les mêmes que dans $\mathbb{R}$;
- Il existe dans $\mathbb{C}$ un nombre non réel, noté i, vérifiant $i^2 = -1$;
- Tout nombre complexe z s'écrit de façon unique sous sa forme algébrique :

$$z = a + ib \text{ où } a \text{ et } b \text{ sont des réels.}$$

Exemple 1 :

- $(2+3i)(5-i) =$...
- $(-1+2i)(2-5i) =$...
- $(4-3i)^2 =$...

Définition 2 :

Pour un nombre complexe z de forme algébrique $z = a + ib$, on a

- Le réel a est appelé partie réelle de z et est noté $\mathrm{Re}(z)$.
- Le réel b est appelé partie imaginaire de z et est noté $\mathrm{Im}(z)$.
- Si $b = 0$ alors $z = a + 0i$ est noté $z = a$ et z est un réel.
- Si $a = 0$ alors $z = 0 + ib$ est noté $z = ib$ et z est appelé imaginaire pur.
- Le complexe $0 + 0i$ noté 0 est à la fois réel et imaginaire pur.

Exemple 2 :

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des complexes suivants :

- $z = 5 - 3i$...
- $z = -4 + i$...

Propriété 1 :

Deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire. Autrement dit, soient z et z' deux nombres complexes :

- $z = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = 0 \text{ et } \mathrm{Im}(z) = 0$
- $z = z' \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z')$

Exemple 3 :

Déterminer le nombre complexe z vérifiant l'équation suivante :

$$2z - 2 = 3iz - 16i$$

2 Conjugué d'un nombre complexe

Définition 3 :

Soit z un complexe de forme algébrique $z = a + ib$, a et b réels. On appelle conjugué du complexe z, le complexe noté $\bar{z}$ défini par :

$$\overline{z} = a - ib$$

Exemple 4 :

Déterminer le conjugué des complexes suivants :

- $z = 5 - 3i$..
- $z = -4 + i$..

Propriété 2 :

- $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$.
- $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z \in i\mathbb{R}$, où $i\mathbb{R}$ est l'ensemble des imaginaires pures.
- Pour z un complexe de forme algébrique $z = a + ib$, on a :

$$z \times \overline{z} = a^2 + b^2$$

.

Exemple 5 :

Pour z un complexe de forme algébrique $z = 5 - 4i$, on a :
$z \times \overline{z} =$ ....
....
....

Exemple 6 :

Méthode pour trouver l'inverse d'un nombre complexe :
Pour $z = 4 - 2i$, déterminer la forme algébrique de :
$\frac{1}{z} =$ ....
....
....

Exemple 7 :

Déterminer la forme algébrique de Z :
$Z = \frac{2-i}{3+2i} =$ ....
....
....

3 Binôme de Newton

Propriété 3 :

Binôme de Newton
Pour tous nombres complexes z et z' et pour tout nombre entier naturel n, on a :

$$(z+z')^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times z^k \times (z')^{n-k}$$

Exemple 8 :

Déterminer la forme algébrique de :
$A = (3-2i)^3$
....
....
....

4 Équation du second degré

Propriété 4 :

On considère le polynôme

$$P(x) = ax^2 + bx + c \text{ (où } a \text{ est un réel non nul)}$$

On note $\Delta = b^2 - 4ac$. La résolution de l'équation $P(x) = 0$ est donnée par :

- Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions, appelées racines du polynôme, données par : $x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$;
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une seule solution, appelée racine double du polynôme, donnée par : $x_0 = \dfrac{-b}{2a}$;
- Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées données par : $z_1 = \dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$;

Exemple 9 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l' équation suivante :

$$(E_1) \quad x^2 - 2x + 5 = 0$$

$\Delta =$ ....

On trouve donc $\Delta < 0$, les solutions sont donc des complexes conjugués :

$z_1 =$ ....

$z_2 =$ ....

La partie réelle commune est : $\alpha =$ ....

La partie imaginaire opposée dans les deux complexes est : $\beta =$ ....

5 Équations polynomiales à coefficients réels

Définition 4 :

• Soient n un entier naturel et a_0, a_1,..., a_n des réels avec $a_n \neq 0$.
Une fonction polynôme à coefficients réels, ou polynôme, P est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui admet une unique écriture polynomiale, à savoir, pour tout nombre complexe z,

$$P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$$

• Le polynôme nul est le polynôme P tel que pour tout nombre complexe z : $P(z) = 0$
• Si P n'est pas le polynôme nul, n est le degré de P.
• L'équation $P(z) = 0$ est appelée équation polynomiale à coefficients réels de degré n.
• On appelle racine d'un polynôme, tout complexe z_0 tel que $P(z_0) = 0$.

Exemple 10 :

Pour le polynôme $p(x) = 3z^4 - 2iz^2 + z - 4$.

- Le degrés de p est : ....
- Le coefficient du monôme de plus haut degrés est : ....
- Le coefficient constant est : ....

Propriété 5 :

- Un polynôme est le polynôme nul si et seulement si tous ses coefficients sont nuls.
- En conséquence, deux polynômes sont égaux si et seulement si les coefficients de chaque monôme de même degré des deux polynômes sont égaux.

Exemple 11 :

Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que : pour tout nombre complexe z,

$$z^3 - i^3 = (z - i)(az^2 + bz + c)$$

Définition 5 :

On dit qu'un polynôme P à coefficients réels est factorisable (ou divisible) par $z - a$ s'il existe un polynôme Q à coefficients réels tel que pour tout nombre complexe z, on a : $P(z) = (z - a) \times Q(z)$.

Exemple 12 :

Montrer que le polynôme $P(z) = z^2 - 4$ est factorisable par $z - 2$:

Propriété 6 :

Soit n un entier naturel non nul. Soit a un nombre complexe.
Pour tout nombre complexe z, on a :

$$z^n - a^n = (z-a)\left(z^{n-1} + az^{n-2} + a^2z^{n-3} + \cdots + a^{n-2}z + a^{n-1}\right) = (z-a)\left(\sum_{k=0}^{n-1} a^k z^{n-1-k}\right)$$

Exemple 13 :

Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 - 8 = 0$.

Propriété 7 :

Soit a un nombre complexe et P un polynôme à coefficients réels de degré supérieur ou égal à 1.
Si $P(a) = 0$ autrement dit, si a est une racine de P, alors P se factorise par $z - a$, autrement dit, il existe un polynôme Q à coefficients réels avec $\deg(Q) = \deg(P) - 1$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = (z - a) \times Q(z)$.

Exemple 14 :

On considère l'équation $z^3 - 2z^2 + z - 2 = 0$.
a) Vérifier que 2 est une solution de l'équation.
b) Déterminer toutes les solutions de l'équation dans $\mathbb{C}$.

Propriété 8 :

• Un polynôme non nul de degré n a au plus n racines.
• Le nombre de solutions d'une équation polynomiale à coefficients réels est inférieure ou égal à son degré.

Remarque :
Si un polynôme de degré n s'annule pour au moins $n + 1$ racines distinctes, alors P est le polynôme nul.

Propriété 9 :

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout nombre complexe z, $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ un polynôme de degré n à coefficients réels avec $a_n \neq 0$.
Alors :
- la somme de toutes ses racines est égale à $\dfrac{-a_{n-1}}{a_n}$
- le produit de toutes ses racines est égal à $\dfrac{(-1)^n a_0}{a_n}$

Exemple 15 :

Déterminer le polynôme P de degrés 2 dont le coefficient du monôme de plus haut degré est 1 et qui a pour racines $z_1 = 1 + 2i$ et $z_2 = 1 - 2i$.